PD Dr. Markus Junker
Dr. Daniel Palacin

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2018/19

Modelltheorie

Übungsblatt 12

Abgabe[1]: 30.01.2019

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.**
Sei T eine vollständige Theorie, $\mathfrak{M} \models T$ und $A \subseteq M$. Zeigen Sie: Wenn A sowohl eine minimale Erweiterung als auch eine Primerweiterung besitzt, dann ist die minimale Erweiterung von A eindeutig bis auf Isomorphie über A, ebenso die Primerweiterung.

Aufgabe 2 (2 Punkte)**.**
Sei T eine $\mathcal{L}$-Theorie ohne Vaught'sche Paare, $\mathfrak{M} \models T$ und $\varphi(x)$ eine $\mathcal{L}$-Formel. Zeigen Sie: wenn $\varphi(M)$ unendlich ist, dann ist $\mathfrak{M}$ minimale Erweiterung von $\varphi(M)$.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{L} = \{P, s\}$ mit einstelligem Funktionszeichen s und einstelligem Relationszeichen P. Wir schreiben P^1 für P, P^0 für $\neg P$ und $s^n x$ für $\underbrace{ss\ldots s}_{n \text{ mal}} x$.

Sei T die Theorie zykelfreier Bijektionen, in der jede endliche $\{P, \neg P\}$-Folge vorkommt. Konkret wird T axiomatisiert durch:

$$\big\{\forall x \exists y\, sy \doteq x,\ \forall x \forall y\, (sx \doteq sy \to x \doteq y)\big\} \cup \big\{\forall x\, \neg s^{n+1}x \doteq x \;\big|\; n \in \mathbb{N}\big\}$$
$$\cup \big\{\exists x (P^{\varepsilon_0} x \wedge P^{\varepsilon_1} sx \wedge \cdots \wedge P^{\varepsilon_n} s^n x) \;\big|\; n \in \mathbb{N}, (\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^{n+1}\big\}$$

Benutzen Sie, dass T vollständig ist und Quantorenelimination hat in der Sprache mit einem zusätzlichen Zeichen für s^{-1}. Zeigen Sie für T:

a) Man kann P so interpretieren, dass aus $(\mathbb{Z}, x \mapsto x+1)$ ein Modell von T wird.

b) Jedes solche Modell ist minimale Erweiterung von $\emptyset$.

c) Es gibt (mindestens zwei) nicht-isomorphe minimale Erweiterungen von $\emptyset$.

d) Es gibt keine Primerweiterung von $\emptyset$.

Freiwillige Zusatzaufgaben (6 Bonuspunkte):

e) Konstruieren Sie $2^{\aleph_0}$ paarweise nicht-isomorphe minimale Erweiterungen von $\emptyset$.

f) Zeigen Sie, dass T vollständig ist und Quantorenelimination in der erweiterten Sprache hat.

[1] Abgabe der Übungsblätter im Flur der Abteilung für Mathematische Logik in der Ernst-Zermelo-Straße 1.

Aufgabe 4 (8 Punkte).
Sei $\mathcal{L}$ die Sprache der abelschen Gruppen und sei $\mathfrak{Z}$ die $\mathcal{L}$-Struktur $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$. Benutzen Sie die Tatsache, dass für eine $\mathcal{L}$-Formel $\psi(x)$ entweder $\psi(\mathbb{Z}) = \emptyset$ oder $\psi(\mathbb{Z}) = \{0\}$ oder $\psi(\mathbb{Z})$ unendlich ist.

a) Zeigen Sie: Für jedes $n \geq 1$ aus $\mathbb{N}$ existiert eine Formel $\varphi_n(x) \in \mathcal{L}$, so dass für a aus $\mathbb{Z}$ genau dann $\mathfrak{Z} \models \varphi_n(a)$ gilt, wenn a durch n teilbar ist.

b) Zeigen Sie, dass die Menge

$$\Sigma(x) = \{\neg x \doteq 0\} \cup \{\neg\varphi_p(x) : p \text{ Primzahl}\}$$

konsistent und nicht-isoliert ist.

c) Schließen Sie daraus, dass $(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ kein Primmodell von $\mathrm{Th}(\mathfrak{Z})$ ist.

d) Ist $\mathfrak{Z}$ ein Primmodell von $\mathrm{Th}(\mathfrak{Z})$ über $\{1\}$? Ist $\mathfrak{Z}$ eine minimale Erweiterung von $\emptyset$? Von $\{1\}$?