PD Dr. Markus Junker
Dr. Daniel Palacin

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2018/19

Modelltheorie

Übungsblatt 13

Abgabe[1]: 06.02.2019

Aufgabe 1 (4 Punkte).

Betrachten Sie die Strukturen $\mathfrak{N}_1 = (\mathbb{N}, 0, s)$ und $\mathfrak{N}_2 = (\mathbb{N}, 0, <)$, wobei $s^{\mathfrak{N}_1}(x) = x+1$. Aus Aufgabe 3 von Blatt 10 folgt, dass die Theorie $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}_1)$ Quantorenelimination hat. Benutzen Sie auch, dass $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}_2)$ Quantorenelimination hat in der Sprache $\{0, <\} \cup \{d_n(x,y) : n < \omega\}$, wobei $d_n(x,y)$ ein zweistelliges Relationszeichen ist, das genau dann in $\mathfrak{N}_2$ gilt, wenn

$$\exists^{=n} z_0 \ldots z_{n-1} \left(x = z_0 \wedge y = z_{n-1} \wedge \bigwedge_{i<j<n} z_i < z_j \right).$$

a) Zeigen Sie, dass in den Strukturen $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ die Formel $x = x$ minimal ist.

b) Ist $x = x$ minimal im abzählbaren saturierten Modell von $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}_1)$ bzw. $\mathrm{Th}(\mathfrak{N}_2)$?

Aufgabe 2 (4 Punkte).

a) Sei (V, E) ein Modell der Theorie des Zufallsgraphen. Zeigen Sie, dass $\mathrm{acl}(A) = A$ für alle Teilmengen A von V.

b) Betrachten Sie $(\mathbb{Z}, 0, +)$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{acl}(\{a\}) = \mathbb{Z}$ für alle a in $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 3 (12 Punkte).

In der Sprache $\mathcal{L}$, welche aus einem einstelligen Relationszeichen P besteht, sei T die Theorie einer unendlichen ko-unendlichen Menge, welche wir mit dem Prädikat P bezeichnen.

a) Zeigen Sie, dass T vollständig ist und Quantorenelimination hat.

b) Ist T $\aleph_0$-kategorisch? Ist T $\aleph_0$-stabil? Ist T $\aleph_1$-kategorisch?

c) Sei $\mathfrak{M}$ ein abzählbares Model. Zeigen Sie, dass die Menge von $\mathcal{L}(M)$-Formeln

$$\{\neg x = m : m \in M\} \cup \{P(x)\}$$

lokal ausgelassen wird.

d) Schließen Sie daraus, dass T ein Vaught'sches Paar besitzt. Können Sie ein Vaught'sches Paar explizit angeben?

e) Zeigen Sie, dass T den Quantor $\exists^\infty$ eliminiert.

f) Ist die Formel $x = x$ minimal? Ist die Formel $P(x)$ minimal?

[1] Abgabe der Übungsblätter im Flur der Abteilung für Mathematische Logik in der Ernst-Zermelo-Straße 1.