PD Dr. Markus Junker
Dr. Daniel Palacin

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2018/19

Modelltheorie
Übungsblatt 2
Abgabe[1]: 31.10.2018

Aufgabe 0. Formulieren Sie eine schriftliche Frage zum Vorlesungsstoff, z.B. über einen Punkt, der Ihnen unklar geblieben ist und den Sie gerne (ggf. nochmals) erläutert hätten, oder z.B. über etwas, worüber Sie gerne Näheres wissen möchten.

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{L} = \{E\}$ die Sprache, welche nur aus einer zweistelligen Relation E besteht. Sei $\mathfrak{A}$ die abzählbare $\mathcal{L}$-Struktur mit unendlich vielen unendlichen $E^{\mathfrak{A}}$-Äquivalenzklassen und genau einer endlichen Äquivalenzklasse, nämlich mit Mächtigkeit 2. Des Weiteren sei $\mathfrak{B}$ die abzählbare $\mathcal{L}$-Struktur mit unendlich vielen unendlichen $E^{\mathfrak{B}}$-Äquivalenzklassen und genau zwei endlichen Äquivalenzklassen, beide mit Mächtigkeit 2.

a) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sich jeweils ineinander einbetten lassen.

b) Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ isomorph?

c) Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ elementar äquivalent?

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{L}_{Gr} = \{\circ, {}^{-1}, e\}$ die Gruppensprache.

a) Zeigen Sie, dass die $\mathcal{L}_{Gr}$-Strukturen $(\mathbb{Q}, +, 0)$ und $(\mathbb{Z}, +, 0)$ nicht elementar äquivalent sind.

b) Zeigen Sie, dass die $\mathcal{L}_{Gr}$-Strukturen $(\mathbb{Z}^n, +, 0)$ und $(\mathbb{Z}^m, +, 0)$ nicht elementar äquivalent sind, falls $0 < n < m$.

Hinweis: Betrachten Sie Nebenklassen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Sei $\mathfrak{B} = (B, \subseteq)$ eine Boole'sche Algebra.

a) Zeigen Sie, dass der Schnitt von Filtern in $\mathfrak{B}$ ein Filter ist.

b) Zeigen Sie, dass für jedes x in $B \setminus \{0\}$ die Menge $\{b \in B \mid x \subseteq b\}$ ein Filter ist.

[1] Abgabe der Übungsblätter im Flur der Abteilung für Mathematische Logik in der Ernst-Zermelo-Straße 1.

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.**
Wir betrachten Boole'sche Algebren als $\mathcal{L}_{BA}$-Strukturen mit $\mathcal{L}_{BA} = \{\cap, \cup, {}^c, 0, 1\}$ mit zweistelligen Funktionszeichen $\cap$ und $\cup$ für Infimum und Supremum, einstelligem ^{c} für das Komplement und Konstanten 0 und 1 für das kleinste und das größte Element.
Wir definieren die *symmetrische Differenz*

$$a \vartriangle b := (a \cap b^c) \cup (a^c \cap b) \ \text{ und } a \ \leftrightarrow b := (a \vartriangle b)^c = (a \cap b) \cup (a^c \cap b^c).$$

Sei $h : \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}'$ ein $\mathcal{L}_{BA}$-homomorphismus zwischen Boole'schen Algebren. Der *Kern* des Homomorphismus ist $\ker(h) := \{b \in B \mid h(b) = 0\}$ und der *duale Kern* ist $\ker^*(h) := \{b \in B \mid h(b) = 1\}$.

a) Zeigen Sie, dass $h(a) = h(b) \Leftrightarrow h(a \vartriangle b) = 0$ und $h(a) = h(b) \Leftrightarrow h(a \leftrightarrow b) = 1$.

b) Zeigen Sie, dass $\ker^*(h)$ ein Filter ist.

c) Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache. Wenn $\phi = \phi(v_0, \ldots, v_{n-1})$ eine $\mathcal{L}$-Formel mit den freien Variablen $v_0, \ldots, v_{n-1}$ ist, steht "$\mathfrak{M} \models \phi(m_0, \ldots, m_{n-1})$" abkürzend für "$\mathfrak{M} \models \phi[\beta]$", wobei β eine beliebige Belegung mit $\beta(v_i) = m_i$ ist.
Zeigen Sie, dass

$$\phi \mapsto \{(m_0, \ldots, m_{n-1}) \in M^n \mid \mathfrak{M} \models \phi(m_0, \ldots, m_{n-1})\}$$

ein Homomorphismus Boole'scher Algebren zwischen $\mathcal{F}_n(\mathcal{L})$ und der Potenzmengenalgebra $\mathfrak{P}(M^n)$ ist.

Die Menge, auf die ϕ abgebildet wird, heißt übrigens die *durch ϕ in $\mathfrak{M}$ definierte Menge.*
Hinweis: Teil *a*) und *b*) helfen nicht für Teil *c*).