PD Dr. Markus Junker
Dr. Daniel Palacin

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2018/19

Modelltheorie
Übungsblatt 4
Abgabe[1]: 14.11.2018

Aufgabe 0. Formulieren Sie eine schriftliche Frage zum Vorlesungsstoff, z. B. über einen Punkt, der Ihnen unklar geblieben ist und den Sie gerne (ggf. nochmals) erläutert hätten, oder z. B. über etwas, worüber Sie gerne Näheres wissen möchten.

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**

a) Zwei Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ heißen *fast disjunkt*, falls $f(n) \neq g(n)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es $2^{\aleph_0}$ viele Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gibt, die paarweise fast disjunkt sind.

b) Sei $\mathcal{L}$ die Sprache, die für jedes $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ein einstelliges Funktionszeichen $\underline{f}$ enthält und $\mathfrak{N}$ die $\mathcal{L}$-Struktur auf $\mathbb{N}$ mit $\underline{f}^{\mathfrak{N}} = f$. Zeigen Sie, dass eine echte elementare Erweiterung $\mathfrak{N}^*$ von $\mathfrak{N}$ mindestens $2^{\aleph_0}$ viele Elemente besitzt.
Hinweis: Betrachten Sie $f^{\mathfrak{N}^*}(e)$ und $g^{\mathfrak{N}^*}(e)$ für ein neues Element e und paarweise disjunkte f, g.

Aufgabe 2 (6 Punkte)**.**
Zu jedem n in $\mathbb{N}$ sei V_n ein Vektorraum über einem Körper K. Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf $\mathbb{N}$.

a) Zeigen Sie, dass

$$W = \left\{ v \in \prod_{n \in \mathbb{N}} V_n : \{n \in \mathbb{N} : v(n) = 0\} \in \mathcal{U} \right\}$$

ein Untervektorraum von $\prod_{n \in \mathbb{N}} V_n$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $\prod_{n \in \mathbb{N}} V_n / W = \prod_{n \in \mathbb{N}} V_n / \mathcal{U}$.

c) Nehmen Sie an, dass K abzählbar ist und die V_n endlichdimensional sind. Zeigen Sie, dass das Ultraprodukt $\prod_{n \in \mathbb{N}} V_n / \mathcal{U}$ keine abzählbare Basis hat.
Hinweis: Betrachten Sie die Mächtigkeit von dem Ultraprodukt.

Aufgabe 3 (8 Punkte)**.**
Zu jedem n in $\mathbb{N}$ sei $\mathfrak{A}_n = (A_n, <, s, c, d)$ eine endliche Struktur mit $A_n = \{0, \ldots, 2^{n+1}\}$, $c^{\mathfrak{A}_n} = 0$ und $d^{\mathfrak{A}_n} = 2^{n+1}$, so dass $<^{\mathfrak{A}_n}$ eine totale Ordnung definiert und $s^{\mathfrak{A}_n}$ die Nachfolgerfunktion ist, wobei $s^{\mathfrak{A}_n}(2^{n+1}) = 2^{n+1}$.
Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf $\mathbb{N}$, der nicht Hauptfilter ist und $\mathfrak{A} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{A}_n / \mathcal{U}$.

a) Zeigen Sie, dass $<^{\mathfrak{A}}$ eine diskrete totale Ordnung mit maximalem Element $c^{\mathfrak{A}}$ und minimalem Element $d^{\mathfrak{A}}$ definiert.

[1] Abgabe der Übungsblätter im Flur der Abteilung für Mathematische Logik in der Ernst-Zermelo-Straße 1.

b) Geben Sie einen Repräsentanten eines Elements a in A an, so dass $s^n(c^{\mathfrak{A}}) \neq a$ und $s^n(a) \neq d^{\mathfrak{A}}$ für alle n aus $\mathbb{N}$.

c) Geben Sie einen Repräsentanten eines Elements b in A an, so dass $s^n(c^{\mathfrak{A}}) \neq b$, $s^n(a) \neq b$, $s^n(b) \neq a$ und $s^n(b) \neq d^{\mathfrak{A}}$ für alle n aus $\mathbb{N}$.

d) Zeigen Sie, dass es $2^{\aleph_0}$ viele Elemente a in A mit $s^n(c^{\mathfrak{A}}) \neq a$ und $s^n(a) \neq d^{\mathfrak{A}}$ für alle n aus $\mathbb{N}$ gibt.