PD Dr. Markus Junker
Dr. Daniel Palacin

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2018/19

Modelltheorie
Übungsblatt 7
Abgabe[1]: 05.12.2018

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**

a) Zeigen Sie, dass die Theorie des Zufallsgraphen Quantorenelimination hat und vollständig ist.

b) Zeigen Sie, dass die Theorie der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte Quantorenelimination hat und vollständig ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**
Gegeben eine Formel $\varphi(x, y_1, \ldots, y_n)$ in der Ringsprache, zeigen Sie, dass es eine natürliche Zahl N gibt, so dass für jedes Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ aus einem Modell K von ACF_p oder ACF_0 die Menge

$$\varphi(K, a_1, \ldots, a_n) = \{b \in K : K \models \varphi(b, a_1, \ldots, a_n)\}$$

entweder unendlich oder der Mächtigkeit höchstens N ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.**
Sei ϕ eine Aussage in der Ringsprache. Dann sind äquivalent:

a) $(\mathbb{C}, +, \cdot, -, 0, 1,) \models \phi$.

b) $\mathrm{ACF}_0 \vdash \phi$.

c) $\mathrm{ACF}_p \vdash \phi$ für fast alle Primzahlen p.

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.**
Aus dem Hilbert'schen Nullstellensatz folgt: *Wenn K ein algebraisch abgeschlossener Körper ist und $f_1, \ldots, f_s$ Polynome in $K[x]$ sind, dann haben $f_1, \ldots, f_s$ genau dann keine gemeinsame Nullstelle, wenn es Polynome $g_1, \ldots, g_s$ in $K[x]$ gibt, so dass $f_1 \cdot g_1 + \ldots + f_s \cdot g_s = 1$.*

Für das Polynom $f(x)$ des Grades n sei $\bar{a} = (a_0, \ldots, a_n)$ das Tupel seiner Koeffizienten. Wir schreiben

$$f(x) = f(x, \bar{a}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k.$$

[1] Abgabe der Übungsblätter im Flur der Abteilung für Mathematische Logik in der Ernst-Zermelo-Straße 1.

Seien $f_1(x), \ldots, f_s(x)$ Polynome.

a) Sei K ein Körper und $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_s$ Tupel in K. Zeigen Sie, dass es für jede natürliche Zahl d eine Formel $\chi_d(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ in der Ringsprache gibt, so dass $K \models \chi_d(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_s)$ genau dann gilt, wenn es Polynome $g_1, \ldots, g_s$ in $K[x]$ von Grad $\leq d$ mit $f_1(x, \bar{a}_1) \cdot g_1 + \ldots + f_s(x, \bar{a}_s) \cdot g_s = 1$ gibt.

b) Zeigen Sie, dass es eine natürliche Zahl d gibt, so dass

$$\mathrm{ACF} \vdash \forall \bar{y}_1 \ldots \forall \bar{y}_s \left(\neg \exists x \bigwedge_{i=1}^{s} f_i(x, \bar{y}_i) = 0 \leftrightarrow \chi_d(\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_s) \right).$$