PD Dr. Markus Junker
Dr. Daniel Palacin

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2018/19

Modelltheorie

Übungsblatt 8

Abgabe[1]: 12.12.2018

Aufgabe 1 (4 Punkte).
Sie $\mathcal{B}$ eine Boole'sche Algebra. Für einen Filter $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{B}$ definieren wir $\sim_{\mathcal{F}}$ auf B durch

$$x \sim_{\mathcal{F}} y \;\Leftrightarrow\; (x^c \vee y) \wedge (x \vee y^c) \in \mathcal{F}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\sim_{\mathcal{F}}$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}/\sim_{\mathcal{F}}$ eine Boole'sche Algebra mit der induzierten Struktur ist.

Aufgabe 2 (4 Punkte).

a) Seien $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$ zwei Modelle einer Theorie T. Zeigen Sie, dass $\mathrm{tp}^{\mathfrak{M}}(\bar{a}/A) = \mathrm{tp}^{\mathfrak{N}}(\bar{a}/A)$ für jedes Tupel $\bar{a}$ aus M und jede Teilmenge A von M.

b) Geben Sie zwei elementare äquivalente Modelle einer Theorie an, in denen *a*) nicht gilt.

Aufgabe 3 (8 Punkte).
Wir betrachten Strukturen, deren Universum (nur) aus Punkten und Geraden besteht. Punkte sind keine Geraden. Geraden sind entweder rot oder blau. Ferner liegt jeder Punkt in keiner oder höchstens einer Geraden.

a) Geben Sie eine Axiomatiserung T der Klasse dieser Strukturen in einer geeigneten Sprache an.

b) Zeigen Sie, dass T die Amalgamierungseigenschaft nicht besitzt.

c) Ist die Vereinigung zweier Zufallsgraphen ein Zufallsgraph?

d) Besitzt die Theorie des Zufallsgraphen die Amalgamierungseigenschaft?
Hinweis: Zeigen Sie, dass eine geeignete Theorie konsistent ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte).
Betrachten Sie $(\mathbb{Q}, <)$ als Modell der Theorie der dichten linearen Ordnungen ohne Endpunkte.

a) Zeigen Sie, dass es genau einen 1-Typ $p(x)$ über $\mathbb{Q}$ gibt, welcher die Menge von Formeln

$$\{q < x : q \in \mathbb{Q}\}$$

enthält.

b) Zeigen Sie, dass $p(x)$ nicht isoliert ist.

[1] Abgabe der Übungsblätter im Flur der Abteilung für Mathematische Logik in der Ernst-Zermelo-Straße 1.