Prof. Amador Martin-Pizarro — Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Übungen: Daniel Palacín — Wintersemester 2019/2020

Modelltheorie
Blatt 3
Abgabe: 19.11.2019, 14Uhr

Aufgabe 1 (6 Punkte)**.**
Sei $\mathcal{U}$ ein reicher Ultrafilter auf $\mathbb{N}$ (d.h. kein Hauptfilter).

a) Zu der Teilmenge Y von $\mathbb{N}$ mit charakteristische Funktion 1_Y, definiere die Funtion $f_Y : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ als $f_Y(n) = \sum_{m<n} 1_Y(m) \cdot 2^m$. Zeige, dass die Menge $\{n \in \mathbb{N} : f_Y(n) = f_Z(n)\}$ endlich ist, falls $Y \neq Z$.

In der Sprache $\mathcal{L}$, sei zu jedem n aus $\mathbb{N}$ eine unendliche abzählbare $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}_n$ mit Universum $A_n = (a_{n,i})_{i\in\mathbb{N}}$.

b) Gegeben Teilmengen Y und Z von $\mathbb{N}$, zeige, dass die Folgen $(a_{n,f_Y(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(a_{n,f_Z(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann äquivalent modulo $\mathcal{U}$ (siehe Blatt 1, Aufgabe 3 (f)) sind, wenn $Y = Z$.

c) Schließe daraus, dass $\left|\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n/\mathcal{U}\right| \geq |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$.

Aufgabe 2 (5 Punkte)**.**
In der Sprache $\mathcal{L}$, welche aus einem zweistelligen Relationszeichen E besteht, betrachte die Theorie T, welche besagt, dass die Interpretation der Relation E eine Äquivalenzrelation derart ist, dass es für jedes n aus $\mathbb{N}$ genau eine Äquivalenzklasse der Größe n gibt.

a) Gib eine Axiomatisierung von T an. Zeige, dass T konsistent ist, aber keine Quantorenelimination hat.

b) Füge neue Konstantenzeichen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hinzu und betrachte die Erweiterung T_1 von T in der Sprache $\mathcal{L} \cup \{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, welche besagt, dass die Äquivalenzklasse von (der Interpretation von) c_n genau Größe n hat. Zeige, dass T_1 vollständig mit Quantorenelimination ist. Ferner besitzen die Theorien T und T_1 dieselbe Modelle (bis auf Einschränkung der Sprache).

Aufgabe 3 (9 Punkte)**.**
Die Darstellung einer natürlichen Zahl n zur Basis 2 ist $n = \sum_{i=0}^{k} [n]_i \cdot 2^i$, wobei $[n]_i \in \{0, 1\}$ und $k \geq 0$. Definiere eine zweistellige Relation R auf $\mathbb{N}$ folgendermassen: $R(n, m)$ genau dann, wenn $[m]_n = 1$ oder $[n]_m = 1$. Betrachte $(\mathbb{N}, R)$ als Struktur in der Sprache $\mathcal{L} = \{R\}$.

a) Zeige, dass $(\mathbb{N}, R)$ folgende Eigenschaften (ausdrückbar in Logik erster Stufe) besitzt: Das Universum ist ein Graph (im modelltheoretischen Sinne, das heißt, die Relation R ist symmetrisch und irreflexiv) derart, dass für je zwei endliche disjunkte Teilmengen A und B es ein Element c gibt, mit $R(c, a)$ für jedes a in A, aber $\neg R(c, b)$ für b aus B.

b) Gib eine Axiomatisierung T der obigen Eigenschaften. Zeige, dass die Theorie T vollständig mit Quantorenelimination ist. Die Theorie T heißt die Theorie des *Zufallsgraphen*.

c) Seien A und B disjunkte Teimengen von $\mathbb{N}$. Zeige, dass es ein Element c in einer elementaren Erweiterung $\mathcal{M}$ von $(\mathbb{N}, R)$ derart gibt, dass $R(c, a)$ für alle a aus A, aber $\neg R(c, b)$ für jedes b aus B.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach im Keller des mathematischen Instituts.