Übung 5.1. Man zeige, daß das Kreuz aus den beiden Koordinatenachsen in $\mathbb{R}^2$ keine Mannigfaltigkeit ist.

$M = \{xy = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Wäre M Mannigfaltigkeit, dann wäre

dim $T_0 M = 2$, weil $\gamma(t) = (0,t)$

$\delta(t) = (t,0)$

zwei Kurven in M mit linear unabh. Ableitungen sind: $\dot{\gamma}(t) = (0,1)$, $\dot{\delta}(t) = (1,0)$

Außerdem enthält M dann eine Umgebung von 0, was allerdings nicht der Fall ist.

$\dot{\gamma}(0) \in T_0 M$

$\dot{\delta}(0) \in T_0 M$ $\Rightarrow$ dim $T_0 M \geq 2$ in 0 aber in allen anderen Komponenten ist dim $= 1$

Übung 5.1. Man zeige, daß das Kreuz aus den beiden Koordinatenachsen in $\mathbb{R}^2$ keine Mannigfaltigkeit ist.

Sei $M := \{xy = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Wir betrachten die Kurven

$\gamma(t) = (0, t)$, $\delta(t) = (t, 0)$ in M

Es gilt $\gamma(0) = (0,0)$ und $\delta(0) = 0,0)$

Außerdem sind $\dot{\gamma}(t) = (0,1)$ und $\dot{\delta}(t) = (1,0)$

linear unabhängig

Also $\dot{\gamma}(t), \dot{\delta}(t) \in T_0 M$ und $\dim T_0 M \geq 2$

Allerdings gilt auf jeder Umgebung U von 0: $\dim T_{U \setminus \{0\}} M = 1$, somit kann das Koordinatenkreuz keine Mannigfaltigkeit sein.

Übung 5.2 (**Schnitt von Mannigfaltigkeiten**). Man zeige: Gegeben in einem endlichdimensionalen reellen Raum X zwei Mannigfaltigkeiten $M, N \subset X$ und ein Punkt $p \in M \cap N$ mit

$$\mathrm{T}_p M + \mathrm{T}_p N = \vec{X}$$

gibt es eine offene Umgebung U von p derart, daß $U \cap M \cap N$ eine Mannigfaltigkeit ist. Man bestimme auch die Dimension dieser Schnittmannigfaltigkeit.

Sei $T_pM + T_pN = \mathbb{R}^n$

Z: $\exists$ Umgebung U von p, s.d. $U \cap M \cap N$ eine Untermannigfaltigkeit ist

Sei $\dim M = k$ und $\dim N = h$

Da M eine Mannigfaltigkeit ist, existiert eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^n$ von p und eine Funktion $f: V \to \mathbb{R}^{n-k}$, so dass $M \cap V = f^{-1}(0)$

Außerdem ist d_pf surjektiv

Weiter existiert

$g: V \longrightarrow \mathbb{R}^{n-h}$, so dass $N \cap V = g^{-1}(0)$ und d_pg surjektiv ist.

Wir betrachten nun

$$(f, g): V \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^{n-h} \cong \mathbb{R}^{2n-k-h}$$
$$v \longmapsto (f(v), g(v))$$

Es gilt dann:

$$\ker d_p(f,g) = \underbrace{\ker d_p f}_{= T_p M} \cap \underbrace{\ker d_p g}_{= T_p N}$$

Und wir erhalten (vgl. (*)):

(*) Wir wissen aus LA
$\dim V \cap W$
$= \dim V + \dim W$
$- \dim (V+W)$

$$\dim \ker d_p(f,g)$$
$$= \dim T_p M + \dim T_p N - n$$
$$= k + h - n$$

$\Rightarrow \dim \mathrm{Bild}\ d_p(f,g) = n - \dim \ker = 2n - k - h$

$\Rightarrow d_p(f,g)$ ist surjektiv

Wir erhalten mit Proposition 4.2.15:

$M \cap N \cap V = (f,g)^{-1}(0)$ ist ~~Mannigfaltigkeit~~ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n - 2n + k + h = h + k - n$

Übung 5.3. Man bestimme die Extrema der Funktion $f(x,y,z) = x + y + z$ auf dem halben Ellipsoid $\{(x,y,z) \mid x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1, z \geq 0\}$. $=: M$

Wir sehen $h(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$, dann ist

$d_p h = (2x \;\; 4y \;\; 6z) \neq 0 \;\; \forall (x,y,z) \in M$

Mit 4.5.1 folgt, dass f ein lokales Extremum bei p hat, falls $d_p f = \lambda d_p h$ für $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (1 \;\; 1 \;\; 1) = \lambda (2x \;\; 4y \;\; 6z) \quad (*)$$

Wir erhalten wegen $(*)$ also die Bedingungen

$$x = \frac{1}{2\lambda}, \; y = \frac{1}{4\lambda}, \; z = \frac{1}{6\lambda}$$

Da $(x,y,z) \in M$, muss auch gelten:

$x^2 + 2y^2 + 3z^2$, was uns insgesamt

$$\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{16} + \frac{3}{36}\right) = 1 \quad \text{liefert}$$

$$\Rightarrow \lambda = \sqrt{\frac{6+3+2}{24}} = \sqrt{\frac{11}{24}} \quad (A)$$

(Wir erhalten nur eine Lösung, da $z > 0$ erfüllt sein muss)

Wir müssen noch den Rand von M betrachten, also

$\partial M = \{(x,y,z) \mid x^2 + 2y^2 = 1, z = 0\} \cong \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow f = x + y$. Wieder muss gelten: $d_p f = \lambda d_p (x^2 + 2y^2)$

$$\Leftrightarrow (1 \;\; 1) = \lambda (2x \;\; 4y)$$

Wir erhalten dadurch die Bedingungen

$$x = \frac{1}{2\lambda} \quad y = \frac{1}{4\lambda}$$

Analog wie zuvor folgt

$$\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right) = 1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{3}{8}} \quad (B)(C)$$

Wir berechnen:

$$f((A)) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) = \sqrt{\frac{24}{11}}\left(\frac{11}{12}\right)$$

$$f((B)/(C)) = \frac{1}{\lambda_{1,2}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}\left(\frac{3}{4}\right)$$

$\Rightarrow$ Maximum ist gegeben durch $\sqrt{\frac{24}{11}}\left(\frac{11}{12}\right)$

Minimum ist gegeben durch $-\sqrt{\frac{8}{3}}\left(\frac{3}{4}\right)$

Übung 5.4. Wir betrachten das Polynom $f(x, y, z) = x^7y^2z + xyz^5$ und finden $f(1, 1, 1) = 2$. Man zeige, daß es auf einem hinreichend kleinen Ball $B \subset \mathbb{R}^2$ um $(1, 1)$ genau eine stetige Funktion $\varphi : B \to \mathbb{R}$ gibt mit $\varphi(1, 1) = 1$ und $f(x, y, \varphi(x, y)) = 2$ und bestimme bei $(1, 1)$ deren partielle Ableitungen φ_x, φ_y.

Wir bestimmen zunächst das Differential von f:

$$df = \begin{pmatrix} 7x^6y^2z + yz^5 & 2x^7yz + xz^5 & x^7y^2 + 5xyz^4 \end{pmatrix}$$

Das Differential in $(1,1,1)$ ist dann gegeben durch

$$d_{(1,1,1)}f = \begin{pmatrix} 7+1 & 2+1 & 1+5 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 8 & 3 & \underset{\neq 0}{6} \end{pmatrix}$$

Da der letzte Eintrag in $d_{(1,1,1)}f$ nicht Null ist, folgt mit dem Satz über implizite Funktionen, dass ein ℓ wie in der Aufgabenstellung gefordert existiert.

Weiterhin liefert uns der Satz über implizite Funktionen die Formel

$$\frac{\partial \ell}{\partial x} = -\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{6} \cdot 8 = -\frac{4}{3}$$

Analog erhalten wir:

$$\frac{\partial \ell}{\partial y} = -\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{6} \cdot 3 = -\frac{1}{2}$$