Übungen Analysis 2

Abgabe bis Mittwoch 21.6 vor der Vorlesung

Übung 7.1. Man zeige, daß die abgeschlossene Einheitskugel $B \subset \mathbb{R}^3$ das Volumen $4\pi/3$ hat, daß sie also genauer eine 3-Fastfaltigkeit ist mit $\int_B 1 = 4\pi/3$.

Übung 7.2 (**Oberfläche eines Rotationskörpers**). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges kompaktes Intervall und $f : I \to (0, \infty)$ stetig differenzierbar. Man zeige, daß die **Mantelfläche** $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in I, x^2 + y^2 = (f(z))^2\}$ eine kompakte 2-Fastfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$ ist mit der Fläche

$$\int_M 1 = 2\pi \int_I f(z)\sqrt{1 + (f'(z))^2}\,\mathrm{d}z$$

Die anschauliche Bedeutung unserer Formel für die Oberfläche eines Rotationskörpers erkennt man, wenn man unsere Rotationsfläche durch eine Vereinigung von dünnen Bändern der Gestalt „oberer Ränder von Eiswaffeln“ approximiert.

Übung 7.3. Gegeben eine kompakte k-Fastfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathrm{O}(n)$ zeige man

$$\int_M 1 = \int_{A(M)} 1$$

Insbesondere und in Worten bleibt also beim Drehen von Flächen im Raum ihre Oberfläche unverändert.

Übung 7.4. Man gebe ein glattes Vektorfeld auf $\mathbb{R}$ an, das keine auf ganz $\mathbb{R}$ definierten Flußwege besitzt.

Übung 7.1. Man zeige, daß die abgeschlossene Einheitskugel $B \subset \mathbb{R}^3$ das Volumen $4\pi/3$ hat, daß sie also genauer eine 3-Fastfaltigkeit ist mit $\int_B 1 = 4\pi/3$.

$B = \{x^2+y^2+z^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$

Aus 2.1 haben wir

$K : [0,1] \times [0,\pi] \times [0,2\pi] \longrightarrow B$

Das ist eine 3-Integrationskarte

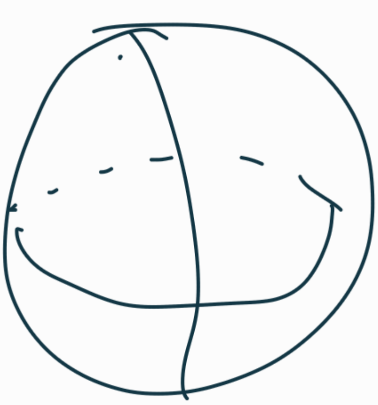
d.h.: (Q, φ) ist Intkarte von X, falls (Q: Quader) $\circledast$

- $\varphi : Q \to X$ stetig diffbar
- $\varphi(Q^\circ) \cap \varphi(\partial Q) = \emptyset$
- $\varphi|Q^\circ$ injektiv
- $d_p\varphi$ ist injektiv für $p \in Q^\circ$

$$\int_B 1 = \int_Q 1 \circ K = \int_Q 1 \underbrace{\sqrt{\det (d_pK)^T (d_pK)}}_{r^2 \sin\theta}$$

$$= \int_0^1 dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \, (r^2 \sin\theta)$$

$$= 2\pi \int_0^1 dr \, (\underbrace{-\cos\pi + \cos 0}_{=2}) r^2 = \frac{4\pi}{3}$$



$\{x^2+y^2+z^2=1\}$
$\cup$

$$\varphi(\partial Q) = \left\{ \begin{matrix} y=0 \\ x \geq 0 \end{matrix} \right\} \cap B$$

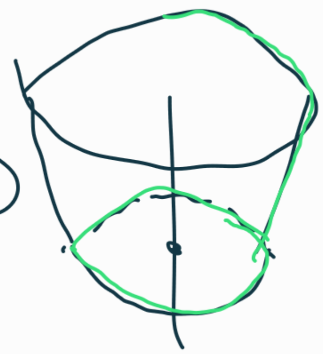
$$\varphi(Q^\circ) = \left\{ \begin{matrix} y \neq 0 \\ \text{oder } x<0, \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{matrix} \right\}$$

Übung 7.2 (**Oberfläche eines Rotationskörpers**). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges kompaktes Intervall und $f : I \to (0, \infty)$ stetig differenzierbar. Man zeige, daß die **Mantelfläche** $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in I, x^2 + y^2 = (f(z))^2\}$ eine kompakte 2-Fastfaltigkeit in $\mathbb{R}^3$ ist mit der Fläche

$$\int_M 1 = 2\pi \int_I f(z)\sqrt{1 + (f'(z))^2}\,\mathrm{d}z$$

Die anschauliche Bedeutung unserer Formel für die Oberfläche eines Rotationskörpers erkennt man, wenn man unsere Rotationsfläche durch eine Vereinigung von dünnen Bändern der Gestalt „oberer Ränder von Eiswaffeln“ approximiert.

z.B. $I = [1,2] \quad f(z) = z \quad \Longrightarrow$



Sehe

$Q = [0, 2\pi] \times I$

$\varphi : [0, 2\pi] \times I \longrightarrow M$

$$(\Theta, z) \mapsto (f(z)\cos\Theta, f(z)\sin\Theta, z)$$

φ ist 2-Integrationskarte

$\varphi(\partial Q)$ siehe oben

$$d_{(\Theta,z)}\varphi = \begin{pmatrix} -f(z)\sin\Theta & f'(z)\cos\Theta \\ f(z)\cos\Theta & f'(z)\sin\Theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

das ist injektiv, da f auf $\mathbb{R}_{>0}$ abbildet

$$\det(d\varphi^T \cdot d\varphi) =$$

$$\det\begin{pmatrix} f^2(z)\underbrace{(\sin^2\Theta + \cos^2\Theta)}_{=1} & \overbrace{-f'f\sin\Theta\cos\Theta + f'f\sin\Theta\cos\Theta}^{=0} \\ 0 & (f'(z))^2\underbrace{(\cos^2\Theta + \sin^2\Theta)}_{=1} + 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(\ldots) = f^2(z)(f'(z)^2 + 1)$$

$$\Rightarrow \int_M 1 = \int_Q 1 \cdot \sqrt{\det(\ldots)} = \int_0^{2\pi} d\Theta \int_I dz\, f(z)\sqrt{f'(z)^2+1}$$

$$= 2\pi \int_I dz\, f(z)\sqrt{f'(z)^2+1}$$

Analysis 2
Sommersemester 2023
Musterlösung Blatt 7 Aufgaben 3+4

Übung 7.3

Sei $A \in O(n)$ also $A^\perp A = Id$ und $M \in \mathbb{R}^n$ kompakte k-Fastfaltigkeit.
Per Kompaktheit gibt es eine endliche Überdeckung von M durch Bilder von Karten (U_i, φ_i) für $0 \leq i \leq m$ mit $\varphi_i : U_i \to W_i$ wobei $U_i \subseteq \mathbb{R}^k$
Mit 5.2.13 (Teilung der Eins) erhalten wir $\alpha_i \in \mathcal{C}_!(W_i, [0,1])$ derart,
dass $\sum_{i=0}^m \alpha_i(x) = 1$ für alle $x \in M$.
Also:

$$\int_M 1 = \sum_{i=0}^m \int_{W_i} \alpha_i(p)$$

Außerdem da $A \circ \varphi_i$ eine Integrationskarte von $A(W_i)$:

$$\int_{A(M)} 1 = \sum_{i=0}^m \int_{A(W_i)} \alpha_i(p)$$

Es reicht also zu zeigen, dass für $0 \leq i \leq m$

$$\int_{W_i} \alpha_i(p) = \int_{A(W_i)} \alpha_i(p)$$

Und tatsächlich

$$\begin{aligned}
&\int_{A(W_i)} \alpha_i(p) \\
&= \int_{U_i} \alpha_i(\varphi_i(p)) \sqrt{det(d_p(A \circ \varphi_i)^\perp d_p(A \circ \varphi_i))} d^k p && \text{Integration über Mannigfaltigkeiten} \\
&= \int_{U_i} \alpha_i(\varphi_i(p)) \sqrt{det(d_p \varphi_i^\perp \circ A^\perp \circ A \circ d_p \varphi_i)} d^k p \\
&= \int_{U_i} \alpha_i(\varphi_i(p)) \sqrt{det(d_p \varphi_i^\perp \circ d_p \varphi_i)} d^k p && A^\perp A = Id \\
&= \int_{W_i} \alpha_i(p) && \text{Integration über Mannigfaltigkeiten}
\end{aligned}$$

Übung 7.4

Wir suchen also $A \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ so, dass es kein differenzierbares $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt mit $\dot{\gamma}(t) = A(\gamma(t))\ \forall t \in \mathbb{R}$
Man wähle A schnell wachsend also z.B: $A(x) = e^x$.
Wir nehmen nun an es gäbe ein $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\dot{\gamma}(t) = A(\gamma(t))$
Also $\dot{\gamma}(t) = e^{\gamma(t)}$
Für $g(t) := -e^{-\gamma(t)}$ gilt nun $g'(t) = \dot{\gamma}(t)e^{-\gamma(t)} = 1$
Wir erhalten also $g(t) = t + c$ für $c \in \mathbb{R}$ also muss per Definition von g:
$\gamma \downharpoonleft_{(-\infty,-c)} (t) = -log(-t - c)$
Dann gilt aber $\lim_{t \to -c} \gamma(t) = \infty$ und somit kann γ bei $-c$ nicht stetig sein was ein Widerspruch ist.