Übung 8.1: Man bestimme alle Lösungen von $x'(t) = t^5 x(t)$.

Wir wissen, dass die Lösung zu jedem Anfangswert eindeutig ist:
Für $x(0) = 0 \Rightarrow x(t) = 0$
Für $x(0) > 0$:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = log(x(t))' = t^5$$

$$\Rightarrow log(x(s)) - log(x(0)) = \int\limits_0^s t^5 \text{ d}t = \frac{s^6}{6}$$

$$\Rightarrow x(s) = e^{\frac{s^6}{6}+C}$$

Wobei C konstant.
Für $x < 0$:

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = -log(-x(t))' = t^5$$

$$\Rightarrow x(s) = Ce^{\frac{s^6}{6}}$$

Wobei C < 0.

Übung 8.2: Gegeben ein mehrpunktiges kompaktes Intervall I, ist der Raum $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ vollständig für die Norm $\|\varphi\|_1 = \|\varphi\| + \|\varphi'\|$ der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionen und ihrer ersten Ableitungen.

Beweis:
Sei f_n eine Cauchy-Folge. Es gilt: $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m > N$:

$$\|f_n - f_m\| + \|f'_n - f'_m\| < \epsilon$$

Somit sind f_n und f'_n Cauchyfolgen in $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$.$\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}, \|\cdot\|)$ ist vollständig und somit gibt es ein g mit $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n = g$.

$$\int\limits_a^t g(x) \text{ d}x = \int\limits_a^t \lim_{n\to\infty} f'_n(x) \text{ d}x = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^t f'_n(x) \text{ d}x = \lim_{n\to\infty} f_n(t) - f_n(a)$$

Wobei verwendet wurde, dass f'_n gleichmäßig konvergiert. Sei G die Stammfunktion von g.

$$\begin{aligned}
\|f_n - G\|_1 &= \|f_n - G\| + \|f'_n - g\| \\
&\leq sup\|f_n(t) - G(t) - f_n(a) + f_n(a) - G(a) + G(a)\| \\
&= sup \int\limits_a^t f'_n(x) - g(x) \text{ d}x + \|f_n(a) - G(a)\| \\
&\leq (t - a)\|f'_n - g\| \to 0
\end{aligned}$$

Musterlösung: Blatt 8

Aufgabe 3

Erfasster Bildschirmausschnitt: 27.06.2023 13:55

Übung 8.3 (**Größere Felder haben schnellere Flußwege**). Gegeben $U \subset \mathbb{R}$ halboffen und $a, b : U \to \mathbb{R}$ stetig ohne Nullstelle mit $a \leq b$ und $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $\gamma, \kappa : I \to U$ differenzierbar mit $\dot\gamma(t) = a(\gamma(t))$ und $\dot\kappa(t) = b(\kappa(t))$ für alle $t \in I$ folgt aus $\gamma(t_0) \leq \kappa(t_0)$ für ein $t_0 \in I$ bereits dieselbe Aussage für alle $t \in I$ mit $t \geq t_0$. Hinweis: Unseren Erkenntnissen 6.2.11 würden so etwas nur unter der stärkeren Annahme $a < b$ liefern. Man erinnere die Diskussion 6.2.4 von Integralkurven eindimensionaler Felder ohne Nullstellen.

- Sei $U \subset \mathbb{R}$ halboffen,

  $a, b : U \to \mathbb{R}$ stetig mit $a \leq b$

  $a(x) \neq 0 \ \forall t \in U$, $b(x) \neq 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$

- Sei $I \subset \mathbb{R}$ mehrp. Intervall

  $\gamma, \kappa : I \to \mathbb{R}$ (stetig) differenzierbar

  mit $\dot\gamma = a(\gamma(t))$, $\dot\kappa(t) = b(\kappa(t))$ $\forall t \in I$

z.z.: Falls $\gamma(t_0) \leq \kappa(t_0)$, $t_0 \in I$

$\Rightarrow \gamma(t) \leq \kappa(t) \quad t \geq t_0$

Bew.:

Wir wissen: $\dot\gamma(t) = \underbrace{a(\gamma(t))}_{\neq 0} \quad \forall t \in I$

(Wir können daraus sofort folgern, dass $\dot\gamma(t) \neq c$, insb. $\dot\gamma(t) \neq 0$
+ $\gamma(t)$ ist str. mon. steigend / fallend, da $\dot\gamma(t)$ stetig, damit $\dot\gamma(t) > 0$ oder $\dot\gamma(t) < 0$)

$$\Leftrightarrow \quad 1 = \frac{\dot\gamma(t)}{a(\gamma(t))}$$

$$\Leftrightarrow \int_{t_0}^{t} 1 \, ds = t - t_0 = \int_{t_0}^{t} \frac{\dot\gamma(s)}{a(\gamma(s))} \, ds$$

$$\overset{\gamma(s) = x}{=} \begin{cases} \displaystyle\int_{\gamma(t_0)}^{\gamma(t)} \frac{1}{a(x)} \, dx & \text{falls } a > 0 \\ \displaystyle\int_{\gamma(t)}^{\gamma(t_0)} \frac{1}{a(x)} \, dx & \text{falls } a < 0 \end{cases}$$

Sei A die Stammfunktion von $\frac{1}{a}$, also

$$A(s) = \int_{\gamma(t_0)}^{s} \frac{1}{a(x)} \, dx$$

$$A(s) = \int_{\gamma(t_0)}^{s} \frac{1}{a(x)}\, dx$$

Analoge Rechnung führen wir für $\dot{\varkappa}(t) = b(\varkappa(t))$

(Sei $B(s) = \int_{\gamma(t_0)}^{s} \frac{1}{b(x)}\, dx$ die Stammfkt. von $\frac{1}{b}$)

Wir führen nun eine Fallunterscheidung durch:

1) Sei $a < 0$, $b > 0$ (also $\gamma(t)$ str. monoton fallend, $\varkappa(t)$ str. mon. steigend):

$$\gamma(t) < \gamma(t_0) \leq \varkappa(t_0) < \varkappa(t)$$

2) $b \geq a > 0$:

Da $b \geq a \Leftrightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} \Rightarrow A \geq B \quad \forall s > \varkappa(t_0) >$

da $A' = a$, A injektiv $\Rightarrow$ es ex. Umkehrabbildung

$$t - t_0 = A(\gamma(t)) \Leftrightarrow \gamma(t) = A^{-1}(t - t_0)$$

$$t - t_0 = B(\varkappa(t)) - B(\varkappa(t_0)) \Leftrightarrow \varkappa(t) = B^{-1}(t - t_0 + B(\varkappa(t_0)))$$

B ist wachsend: $B(k(t_0)) \geq B(\gamma(t_0)) = 0$

Also

$$A(k(t)) \geq B(k(t)) = t - t_0 + B(k(t_0)) \geq t - t_0 = A(\gamma(t))$$

$\overset{A \text{ mon. wachsend}}{\Longrightarrow}$ $k(t) \geq \gamma(t)$

3.) Sei $a \leq b < 0$:

Sei $\tilde{\gamma}(t) = -\gamma(t)$, $\tilde{\gamma}: I \to -U$

Sei $\tilde{a}(t) = -a(-t)$, $\tilde{a}: -U \to \mathbb{R}$

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) = -\dot{\gamma}(t) = -a(\gamma(t)) = -a(-\tilde{\gamma}(t)) = \tilde{a}(\tilde{\gamma}(t))$$

Sei $\tilde{\gamma}$ eine Lösung von $\dot{\tilde{\gamma}}(t) = \tilde{a}(\tilde{\gamma}(t))$

Sei $\tilde{b}(t) = -b(-t)$, $\tilde{b}: -U \to \mathbb{R}$

$\tilde{\varkappa}(t) = -\varkappa(t)$, $\tilde{\varkappa}: I \to -U$

Dann gilt : $\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{x}(t) = -b(x(t)) = -b(-\tilde{x}(t))$

$= \tilde{b}(\tilde{x}(t))$

Damit gilt für $a \le b < 0$: $\tilde{a} \ge \tilde{b} > 0$

Damit folgt, dass

$\tilde{\gamma}(t_0) = -\gamma(t_0) \ge -x(t_0) = \tilde{x}(t_0)$

Daraus folgt, dass $\tilde{\gamma}(t) \ge \tilde{x}(t)$ (*) $\forall t > t_0$,

also $x(t) \ge \gamma(t)$ $\forall t \ge t_0$

(*) Da gilt: sei $\tilde{A}(s) = \int_{\tilde{\gamma}(t_0)}^{s} \frac{1}{\tilde{a}} \, d\tau$

$\tilde{B}(s) = \int_{\tilde{\gamma}(t_0)}^{s} \frac{1}{\tilde{b}} \, d\tau$

Dann gilt:

$\boxed{\tilde{A}(\tilde{\gamma}(t)) = t - t_0}$

$t - t_0 = \tilde{B}(\tilde{x}(t)) - \tilde{B}(\tilde{x}(t_0))$

$\Leftrightarrow \boxed{\tilde{B}(\tilde{x}(t)) = t - t_0 + \tilde{B}(\tilde{x}(t_0))}$

$\tilde{a} \ge \tilde{b} > 0 \Rightarrow \tilde{B} \ge \tilde{A}$

Da $\tilde{B}(\tilde{x}(t_0)) \le \tilde{B}(\tilde{\gamma}(t_0)) = 0$

$\tilde{A}(\tilde{x}(t)) \le \tilde{B}(\tilde{x}(t)) = t - t_0 + \tilde{B}(\tilde{x}(t_0))$

$\le t - t_0 = \tilde{A}(\tilde{\gamma}(t))$

$\Rightarrow \tilde{x}(t) \le \tilde{\gamma}(t)$ $\forall t \ge t_0$

$\Rightarrow \gamma(t) \le x(t)$ $\forall t \ge t_0$

Aufgabe 4

Übung 8.4. Man finde alle reellen Lösungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Differentialgleichung $f^{(4)} = f$, also Funktionen, die ihre eigene vierte Ableitung sind. Hinweis: Man erinnere Analysis 1.

Bew.:

Wir betrachten

Satz 7.4.2. *Seien komplexe Zahlen $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ gegeben.*

1. *Die komplexwertigen n-mal differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f^{(n)} + a_{n-1}f^{(n-1)} + \ldots + a_0 f = 0$ bilden einen Untervektorraum im Raum aller Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, den* **Lösungsraum** *unserer Differentialgleichung;*
2. *Die Abbildung $f \mapsto (f(0), f'(0), \ldots, f^{(n-1)}(0))$ ist ein Isomorphismus dieses Lösungsraums mit dem $\mathbb{C}^n$, der* **Anfangswertisomorphismus***;*
3. *Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle des Polynoms $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$ der Vielfachheit r, so sind die Funktionen $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \ldots, t^{r-1}e^{\lambda t}$ Lösungen unserer Differentialgleichung, und durchläuft λ alle Nullstellen unseres Polynoms, so bilden diese Lösungen eine Basis des Lösungsraums.*

Demnach. Betrachte $f^{(4)} - 1 \cdot f = 0$

Nun betrachte $x^4 - 1 = 0$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ Nullstelle

$\Rightarrow x^4 - 1 = (x^2+1)(x^2-1) = (x+1)(x-1)(x+i)(x-i) = 0$

$\Rightarrow \{1, -1, i, -i\}$ sind Lsg. von $x^4 - 1$

$\Rightarrow \{e^{t \cdot \lambda}, \lambda \in \{1, 1, -i, i\}\}$

Damit $\mathbb{L}_{\mathbb{C}} = \{ f \in C^4(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \mid f(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 e^{it} + c_4 e^{-it}, c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C}\}$

Lösungsraum aller kompl. Lösungen des DE's.

Wir wollen allerdings nur die reellen Lösungen angeben.

Wir wissen:

(f ist reelle Lösung $\Rightarrow$ f ist komplexe Lösung, also $f \in \mathbb{L}_{\mathbb{C}}$)

f ist komplexe Lösung $\Rightarrow$ $Re(f)$ ist reelle Lösung

Damit gilt: für alle reelle Lösungen $f(x)$

$$f(x) = (Re(c_1) + Im(c_1))e^{x} + (Re(c_2) + Im(c_2))e^{-x}$$
$$+ Re(c_3)\cos x + Im(c_3)\sin x + Re(c_4)\cos x + Im(c_4)\sin x$$

Damit gilt für den reelle Lösungsraum:

$$\mathbb{L}_{\mathbb{R}} = \{ f \in C^4(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} + c_3 \sin(x) + c_4 \cos(x), c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R} \}$$