Anwesenheitsaufgaben zweite Vorlesungswoche

Übung 0.1 Sei (X,d) ein metrischer Raum und $d': (X\times X)\times(X\times X)\to\mathbb{R}$, $((x,y),(x',y'))\mapsto \sup\{d(x,x'),d(y,y')\}$ die Produktmetrik auf $X\times X$.

z.z.: $d: X\times X\to\mathbb{R}$ ist stetig.

Beweis: Sei $\varepsilon>0$ und $(x,y)\in X\times X$.

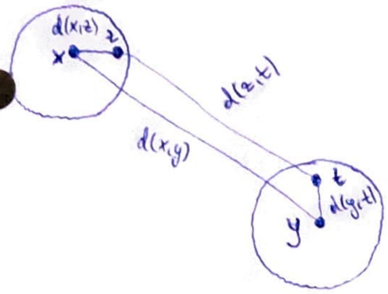
z.z.: $\exists\,\delta>0$ mit $d(B((x,y),\delta))\subset B(d(x,y),\varepsilon)$

Beweis: Für $\delta := \frac{\varepsilon}{2}$ gilt:

Def. der Produktmetrik

$(z,t)\in B((x,y),\delta) \iff d(z,x),\ d(t,y)<\delta$

Bild:



Also

$d(z,t)\le d(z,x)+d(x,y)+d(y,t) < 2\delta + d(x,y) = \varepsilon + d(x,y)$

und analog $d(x,y) < 2\delta + d(z,t) = \varepsilon + d(z,t)$.

$\Rightarrow d(z,t)\in B(d(x,y),\varepsilon)$

$\square$

Sei nun weiter $\emptyset\neq A\subset X$, $d_A: X\to\mathbb{R},\ x\mapsto \inf\{d(x,a)\mid a\in A\}$.

z.z.: $d_A: X\to\mathbb{R}$ ist stetig

Beweis: Sei $\varepsilon>0$, $x\in X$ und $\delta:=\varepsilon$. Dann ist für $z\in B(x,\delta)$

$d(x,z)<\varepsilon$.

Also gilt

$$d_A(z) = \inf\{\underbrace{d(z,a)}_{\le d(z,x)+d(x,a)}\mid a\in A\} \le \inf\{d(z,x)+d(x,a)\mid a\in A\}$$

$$\le d(z,x) + \inf\{d(x,a)\mid a\in A\} < \varepsilon + d_A(x)$$

und analog $d_A(x) < \varepsilon + d_A(z)$

$\Rightarrow d_A(z)\in B(d_A(x),\varepsilon)$

$\square$

Übung 0.2

Seien V, W normierte Vektorräume. Einfachheitshalber schreiben wir $\|\cdot\|$ für die Norm auf V und W.

ZZ.: $B(V,W)$ ist ein Untervektorraum von $\mathrm{Hom}(V,W)$

Beweis: $f \in B(V,W) \Leftrightarrow \exists C \geq 0$ mit $\|f(v)\| \leq C\|v\| \; \forall v \in V$.

Für $f, g \in B(V,W)$ seien C_f, C_g diese Zahlen. Damit gilt für $v \in V$ und $s \in \mathbb{R}$:

$$\|\underbrace{f(v)+g(v)}_{=(f+g)(v)}\| \leq \|f(v)\| + \|g(v)\| \leq C_f\|v\| + C_g\|v\| = (C_f + C_g)\|v\|$$

$$\|\underbrace{s f(v)}_{=(sf)(v)}\| = |s|\,\|f(v)\| \leq |s|\,C_f\,\|v\|.$$

Also ist $B(V,W)$ UVR von $\mathrm{Hom}(V,W)$. □

Sei weiter für $f \in B(V,W)$

$$\|f\| := \sup\{\|f(v)\| \mid \|v\| \leq 1\}$$

ZZ.: Dies definiert eine Norm auf $B(V,W)$

Beweis: Für $f \in B(V,W)$ ist zunächst $\|f(v)\| \leq C\|v\| \leq C$ für ein $C>0$ und $\|v\| \leq 1$, also $\|f\| < \infty$. Der Rest folgt aus

- $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$: $\|f\| = 0 \Leftrightarrow \|f(v)\| = 0 \; \forall v \in V \Leftrightarrow f(v) = 0 \; \forall v \in V$

- $\|\lambda f\| = |\lambda|$ [redacted] $\|f\|$: $\sup\{\underbrace{\|\lambda f(v)\|}_{=|\lambda|\,\|f(v)\|} \mid \|v\| \leq 1\} = |\lambda|\;\|f\|$

- $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$: $\sup\{\underbrace{\|f(v)+g(v)\|}_{\leq \|f(v)\| + \|g(v)\|} \mid \|v\| \leq 1\} \leq \sup\{\|f(v)\| \mid \|v\| \leq 1\} + \sup\{\|g(v)\| \mid \|v\| \leq 1\}$

□

Ist weiter auch U ein normierter VR mit Norm $\|\cdot\|$, $g \in B(U,V)$, $f \in B(V,W)$, so gilt $\|f \circ g\| \leq \|f\|\,\|g\|$.

Beweis. $\|f\circ g\| = \sup\{\|f(g(v))\| \mid \|v\| \leq 1\}$. Betrachte die Fälle:

- $g(v) = 0 \Rightarrow \|f(g(v))\| \leq \|f\|\,\|g\|$
- $g(v) \neq 0 \Rightarrow \|f(g(v))\| = \left\|\,\|g(v)\|\, f\left(\frac{g(v)}{\|g(v)\|}\right)\right\| \leq \|g(v)\| \sup\{\|f(w)\| \mid \|w\| \leq 1\}$
  $= \|g(v)\|\;\|f\|$

$\Rightarrow \|f\circ g\| \leq \|g\| \cdot \|f\|$ □

<u>Übung 0.3</u> Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normiertes Vektorraum und $\varepsilon > 0$, $x \in V$.

<u>z.z.:</u> $B(x, \varepsilon) := \{ y \in V \mid \|x-y\| < \varepsilon \}$ ist konvex, also für $z, y \in B(x, \varepsilon)$ ist auch $tz + (1-t)y \in B(x, \varepsilon)$ $\forall t \in [0,1]$.

<u>Beweis:</u> Sei $y \in B(x, \varepsilon)$, dann ist

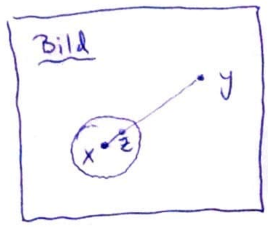
$$\|x - (tz + (1-t)y)\| = \|t(y-x) + (1-t)(z-x)\| \leq |t| \underbrace{\|y-x\|}_{<\varepsilon} + |1-t| \underbrace{\|z-x\|}_{<\varepsilon}$$

$$< \varepsilon$$

□

<u>Übung 0.4</u> Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein norm. VR und $\emptyset \neq U \subset V$ offen. Per Def. der Topologie auf V gibt es dann zu $x \in U$ ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subset U$. Wegen $\langle B(x,\varepsilon) \rangle \subset \langle U \rangle$ genügt es also zu zeigen, dass bereits $\langle B(x, \varepsilon) \rangle = V$ gilt, für alle $x \in V$ und $\varepsilon > 0$.

<u>Beweis:</u>



Sei $y \in \overbrace{V}^{\setminus\{x\}}$. Dann ist $z := ty + (1-t)x$ für $t = \frac{\varepsilon}{2\|y-x\|}$ Element von $B(x, \varepsilon)$, denn

$$\|x - (ty + (1-t)x)\| = |t| \|y-x\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Also können wir schreiben: $y = x + (y-x)$

$$= x + \frac{1}{t} t (y-x) = x + \frac{1}{t}(z-x) = (1 - \tfrac{1}{t})x + \tfrac{1}{t} z$$

□

<u>Übung 0.5</u> Seien X, Y top. Räume, $f: X \to Y$ eine Abbildung

<u>z.z.:</u> f ist stetig in $p \in X$ $\iff$ $\exists$ Umgebung $U \subset X$ von p derart, dass $f|_U$ stetig ist.

<u>Beweis:</u> „$\Longrightarrow$": Wähle $U = X$.

„$\Longleftarrow$": Sei $U \subset X$ Umgebung von $p \in X$, so dass $f|_U$ stetig ist. Zu $V \subset Y$ Umgebung von $f(p)$ gibt es also eine offene Umgebung W von p in U derart, dass

$$f|_U (W) \subset V.$$

Nach der Definition der induzierten Topologie gibt es also eine offene Umgebung W' von p in X mit $W = U \cap W'$. Daraus folgt

$$f(W) = f(U \cap W') = f|_U (W) \subset V,$$

wobei W als Schnitt von Umgebungen von p wieder eine solche ist.

□

Übung 0.6 Sei X ein top. Raum und $B \subset D \overset{\circ}{\subset} X$.

z.z.: $B \overset{\circ}{\subset} D \iff B \overset{\circ}{\subset} X$

Beweis: „$\Rightarrow$": $B \overset{\circ}{\subset} D$, dann gibt es per Definition eine offene Menge $B' \overset{\circ}{\subset} X$ in X mit $B = \underset{\text{offen in } X}{B'} \cap \underset{\text{offen in } X}{D} \overset{\circ}{\subset} X$.

„$\Leftarrow$": $B = B \cap D$, also $B \overset{\circ}{\subset} D$, wenn $B \overset{\circ}{\subset} X$. $\square$