Übungen Analysis 1

Abgabe bis 10.1.2023 um 8:10

Auf diesem Blatt gibt es eine Bonus-Aufgabe zum besseren Punktesammeln. Zu erreichen sind in diesem Wintersemester insgesamt die Hälfte der Punkte, die man bei vier Übungen pro Blatt erreichen könnte.

Übung 10.1. Man bestimme die Ableitung nach x von $f(x) = \log \sqrt{x^2 + v^2}$.

Übung 10.2. Man zeige: Eine differenzierbare Funktion auf einem mehrpunktigen Intervall, deren Ableitung beschränkt ist, ist gleichmäßig stetig.

Übung 10.3. Bei welchem Verhältnis zwischen Durchmesser und Höhe umfaßt eine zylindrische Konservendose mit fest vorgegebener Oberfläche das größtmögliche Volumen?

Übung 10.4. Man zeige: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2 \sin(x^{-1})$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$, aber ihre Ableitung ist nicht stetig beim Nullpunkt.

Bonus-Übung 10.5. Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein mehrpunktiges Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit der Eigenschaft $f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0$. Man zeige, daß dann f in I höchstens eine Nullstelle haben kann, und daß f links von dieser Nullstelle positiv und rechts davon negativ sein muß. Hinweis: Zwischen zwei verschiedenen Nullstellen muß es nach Voraussetzung eine Nichtnullstelle geben und dann eine kleinste Nullstelle oberhalb und eine größte Nullstelle unterhalb dieser Nichtnullstelle. Von da aus finde man einen Widerspruch zu den Annahmen.

Übung 10.1 Für $v \neq 0$ schreiben wir die Funktion $f(x) = \log\sqrt{x^2+v^2}$ als $f = g_1 \circ g_2 \circ g_3$ mit (die Definitionsbereiche sind für die restliche Rechnung irrelevant)

$$\begin{array}{l} g_1 : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \log(x) \end{array}, \qquad \begin{array}{l} g_2 : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0} \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{l} g_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0} \\ x \mapsto x^2 + v^2 \end{array} .$$

Mit den Ableitungen

$$g_1'(x) = \frac{1}{x}, \qquad g_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{und} \qquad g_3'(x) = 2x$$

erhalten wir durch zweifache Anwendung der Kettenregel

$$\begin{aligned} f'(x) &= (g_1 \circ g_2 \circ g_3)'(x) = \left[(g_1' \circ g_2 \circ g_3) \cdot (g_2 \circ g_3)'\right](x) \\ &= \left[(g_1' \circ g_2 \circ g_3) \cdot (g_2' \circ g_3) \cdot g_3'\right](x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+v^2}} \frac{1}{2\sqrt{x^2+v^2}} 2x = \frac{x}{x^2+v^2}. \end{aligned}$$

Übung 10.2 Gegeben ist eine differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem mehrpunktigen Interval $I \subset \mathbb{R}$.

- Die Ableitung der Funktion ist (laut Aufgabe) beschränkt:

  $$|f'(x)| \leq k$$

  für alle $x \in I$ und eine obere Schranke $k \in \mathbb{R}$, die nicht von x abhängt.

- Nach dem Mittelwertsatz gibt es für alle Punkte $a, b \in I$ mit $a < b$ ein $\xi \in [a, b]$, sodass

  $$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

  gilt.

- Für jedes $\varepsilon > 0$ wählen wir

  $$\delta = \frac{\varepsilon}{k}.$$

Sei nun $|b - a| < \delta$. Mit den oben genannten Eigenschaften rechnen wir

$$|f(b) - f(a)| = |b - a|\,|f'(\xi)| \leq |b - a|k < \varepsilon.$$

Also ist die Funktion f auf dem Intervall I stetig. Sie ist sogar gleichmäßig stetig, weil die Beziehung zwischen ε und δ nicht vom Punkt x abhängt.

Übung 10.3 Wir betrachten einen Zylinder mit fest vorgegebener Oberfläche A. Das Verhältnis zwischen Höhe h und Durchmesser d nennen wir

$$R = \frac{h}{d}.$$

Gesucht ist der Wert R^* für das Verhältnis R, der das Volumen V des Zylinders maximiert. Folgende Schritte führen zum Ziel:

1) Wir drücken das Volumen V und die Oberfläche A als Funktionen von h und d aus: $V = V(h,d)$ und $A = A(h,d)$

2) In der Gleichung für V eliminieren wir h und d, sodass wir V für vorgegebene Oberfläche A als Funktion von R ausdrücken: $V = V_A(R)$

3) Wir berechnen den kritischen Punkt R^*, für den $V_A'(R^*) = 0$ gilt.

Schritt 1) Die Oberfläche des Zylinders ist gegeben durch $A = 2A_1 + A_2$, wobei

$$A_1 = \frac{\pi d^2}{4}$$

die Fläche der kreisförmigen Ober- und Unterseite ist und

$$A_2 = hd\pi$$

die Seitenfläche. Das Volumen ist gegeben durch

$$V = \frac{\pi d^2}{4} h.$$

Schritt 2) Zunächst ersetzen wir $h = dR$ in der Gleichung für die Oberfläche:

$$A = 2\frac{\pi d^2}{4} + hd\pi = \frac{\pi d^2}{2} + Rd^2\pi.$$

Auflösen nach dem Durchmesser d ergibt

$$d = \sqrt{\frac{A}{\frac{\pi}{2} + R\pi}}.$$

Damit erhalten wir, erneut mit $h = dR$, für das Volumen

$$V = \frac{\pi d^2}{4} h = \frac{\pi d^3}{4} R = \frac{\pi R}{4} \sqrt{\frac{A}{\frac{\pi}{2} + R\pi}}^3 = \frac{A^{3/2}}{4\sqrt{\pi}} \frac{R}{(R + \frac{1}{2})^{3/2}}.$$

Die Abhängigkeit des Volumens V vom Verhältnis R (dargestellt in der linken Abbildung unten für den exemplarischen Wert $C(A) = 1$) ist dann gegeben durch

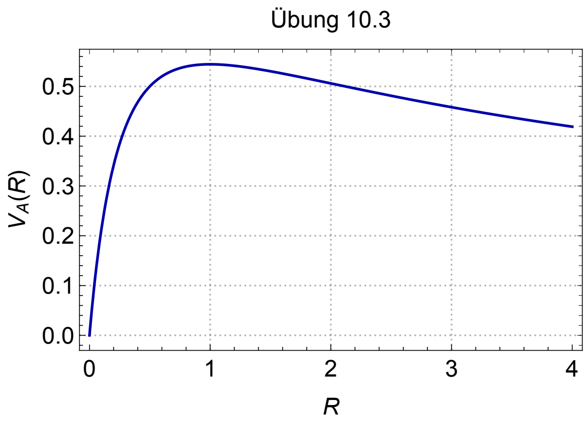
$$V_A(R) = C(A) \frac{R}{(R + \frac{1}{2})^{3/2}}.$$

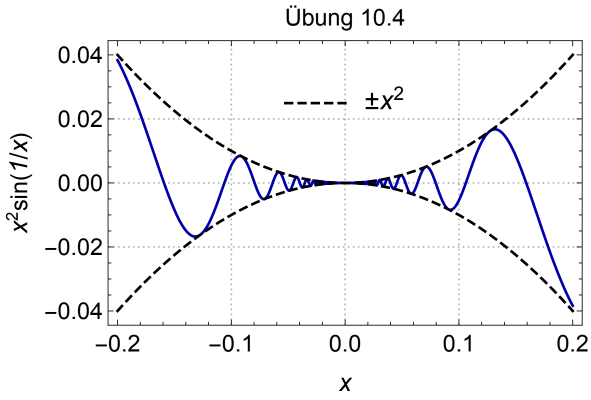
Schritt 3) Wir berechnen die Ableitung

$$V_A'(R) = C(A) \frac{\left(R + \frac{1}{2}\right)^{3/2} - \frac{3}{2} R \left(R + \frac{1}{2}\right)^{1/2}}{\left(R + \frac{1}{2}\right)^3}.$$

Für den einzigen kritischen Punkt R^* gilt dann

$$V_A'(R^*) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(R^* + \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2} R^* = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R^* = 1.$$





Übung 10.4 Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Für $x \neq 0$ berechnen wir mit den bekannten Ableitungsregeln

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Für $x = 0$ berechnen wir mit der Definition der Ableitung

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Also existiert die Ableitung $f'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Allerdings gilt für die Nullfolge $x_n = 1/(2\pi n)$

$$f'(x_n) = 2x_n \sin(2\pi n) - \cos(2\pi n) = -1,$$

und damit

$$\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = -1 \neq 0 = f'(0).$$

Entsprechend ist die Ableitung f' nicht stetig in $x = 0$.

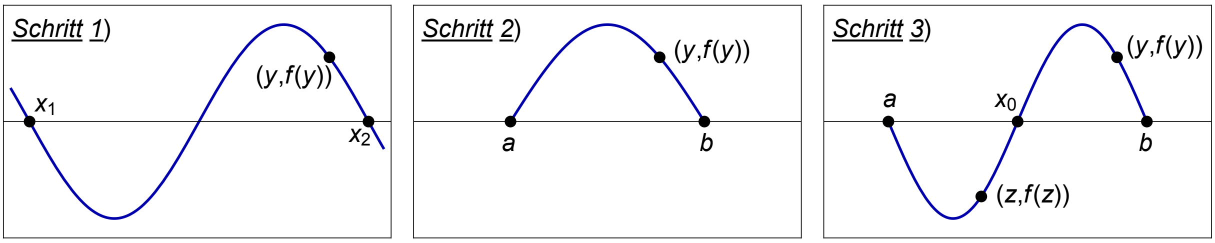
Übung 10.5 $I \subset \mathbb{R}$ ist ein mehrpunktiges Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Außerdem ist an jeder Nullstelle die Ableitung negativ, also $f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) < 0$.

Teil (a) Wir zeigen, dass f höchstens eine Nullstelle haben kann.

Schritt 1) Beweis durch Widerspruch. Seien $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ und $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Wegen $f'(x_2) < 0$, also explizit

$$f'(x_2) = \lim_{y\to x_2} \frac{f(y) - f(x_2)}{y - x_2} < 0,$$

existiert ein $y \in I$ mit $x_1 < y < x_2$ und $f(y) > 0$.



Schritt 2) Wir definieren die Mengen

$$A \equiv \{x \in I \mid x < y, f(x) = 0\} \qquad \text{und} \qquad B \equiv \{x \in I \mid x > y, f(x) = 0\},$$

die alle Nullstellen von f links bzw. rechts von y enthalten. Es gilt $x_1 \in A$ und $x_2 \in B$, daher existieren $a, b \in I$ mit

$$a \equiv \sup A < y < \inf B \equiv b.$$

Die Funktion f ist stetig, daher gilt $f(a) = f(b) = 0$. (Bemerkung: Tatsächlich liegen a und b immer im Intervall I, da $y \in I$ und $x_1 \leq a < y < b \leq x_2$.)

Schritt 3) Da $f(a) = 0$, muss nach Voraussetzung $f'(a) < 0$ gelten. Also muss es ein $z \in (a, b)$ geben mit $f(z) < 0$. Da außerdem $y \in (a, b)$ und $f(y) > 0$, muss f nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle x_0 zwischen y und z besitzen, also insgesamt $f(x_0) = 0$ und $a < x_0 < b$. Dies ist ein Widerspruch zur Definition von $a \equiv \sup A$ und $b \equiv \inf B$, da entweder $x_0 < y$ oder $x_0 > y$. Der Fall $x_0 = y$ ist nicht möglich, da $f(y) > 0$ und $f(x_0) = 0$ gelten muss.

Teil (b) Wir zeigen, dass f links von dieser Nullstelle positiv und rechts davon negativ sein muss.

Sei x_0 die einzige Nullstelle von f. Wir zeigen die Behauptung durch Widerspruch.
Angenommen die Behauptung ist falsch. Dann existiert oBdA ein Punkt $y_1 > x_0$ mit $f(y_1) > 0$ [alternativ $y_1 < x_0$ mit $f(y_1) < 0$, und alle Argumente funktionieren analog]. Außerdem existiert [analog zur Argumentation in Teil (a), Schritt 1)] ein $y_2 > x_0$ mit $f(y_2) < 0$.
Daher existiert nach dem Zwischenwertsatz eine weitere Nullstelle x_1 von f zwischen y_1 und y_2. Dies ist ein Widerspruch zum Ergebnis aus Teil (a), dass f maximal eine Nullstelle besitzen kann.