1. Das Jacobson-Radikal

Sei R ein nicht notwendigerweise komm. Ring.

Def. 1.1. Das Jacobson-Radikal von R ist die Menge $J(R)$ bestehend aus den $r \in R$, die jeden einfachen R-Modul annihilieren.

Also: $$J(R) = \bigcap_{\substack{M \text{ einfacher} \\ R\text{-Modul}}} \ker \begin{pmatrix} R \to \mathrm{End}_R(M) \\ r \mapsto (m \mapsto rm) \end{pmatrix}$$

Insbesondere: $J(R)$ ist beidseitiges Ideal von R!

Lemma 1.2. $$J(R) = \bigcap_{\substack{I \text{ max.} \\ \text{Linksideal}}} I.$$

Erinnerung: Es gibt eine Korrespondenz zwischen maximalen Linksidealen und einfachen R-Moduln:

$$I \text{ max. Linksideal} \rightsquigarrow R/I \text{ einfacher } R\text{-Modul}$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Ann}_R(m) = \{r \in R \mid rm = 0\}, \\ \text{wobei } m \in M \setminus \{0\} \end{pmatrix} \leftarrow M \text{ einfacher } R\text{-Modul}$$

Gilt: $R/\mathrm{Ann}_R(m) \cong M$, wobei M einfacher R-Modul und $m \in M \setminus \{0\}$.

Beweis des Lemmas: Beide Inklusionen folgen sofort aus der Erinnerung. $\square$

Beispiel: 1) k Körper, $R = k[X]/(X^2)$, dann $J(R) = (\bar{X})$.

2) $\mathrm{char}(k) = p > 0 \rightsquigarrow kC_p = k[X]/(X^p - 1) = k[X]/(X-1)^p \Rightarrow J(R) = (\overline{X-1})$.

Def. 1.3. $x \in R$ heißt <u>invertierbar</u> (oder <u>Einheit</u>), falls $\exists y, z \in R: xy = zx = 1$.

Bem.: $x \in R$ Einheit $\rightsquigarrow$ Links- und Rechtsinverses sind gleich und eindeutig bestimmt.

Lemma 1.4. Sei $x \in R$. Dann:

$$x \in J(R) \iff \forall r, s \in R: \quad 1 - rxs \text{ ist Einheit.}$$

Beweis: „$\Leftarrow$": Ang. $x \notin I$ für ein max. Linksideal I.

$\Longrightarrow Rx + I = R$

$\Longrightarrow \exists r \in R, a \in I: \quad 1 = rx + a$

$\Longrightarrow \underbrace{1 - rx}_{\text{Einheit}} = a$ ↯

„$\Longrightarrow$": Sei $x \in J(R)$. $\Longrightarrow \forall s \in R: \; xs \in J(R)$.

Zeige zunächst: $\forall r, s \in R \;\; \exists u \in R: \quad u \cdot (1 - rxs) = 1$.

Lemma 1.2 $\Longrightarrow xs \in I \;\; \forall$ max. Linksideale I.

$\Longrightarrow \forall r, s \in R, \forall$ max. Linksideale I: $\quad 1 - rxs \notin I$, sonst $1 = \underbrace{1 - rxs}_{\in I} + \underbrace{r \cdot (xs)}_{\in I} \in I$.

$\Longrightarrow \forall r, s \in R$: $1 - rxs$ ist links-invertierbar (sonst $\exists$ max. Linksideal I s.d. $1 - rxs \in I$).

Sei u s.d. $u \cdot (1 - rxs) = 1 \quad \Longrightarrow u = 1 - (-ur)(xs)$ ist links-inv.

$\Longrightarrow u$ invertierbar

$\Longrightarrow (1 - rxs) \cdot u = 1$. $\square$

Beispiel: k Körper $\Rightarrow J(k[X]) = \{0\}$. $\quad$ ($1 - f$ invertierbar $\Rightarrow f$ konst.)

Lemma 1.6 (Nakayama) Sei M endl. erz. R-Modul. Dann:
$$\mathcal{J}(R) \cdot M = M \implies M = \{0\}.$$

Beweis: Ang. $M \neq \{0\}$. Sei $(m_1, \dots, m_n)$ ein minimales EZS von M.

$$\mathcal{J}(R) \cdot M = M \Rightarrow \exists r_1, \dots, r_n \in \mathcal{J}(R): \quad m_n = \sum_{i=1}^{n} r_i m_i.$$
$$\implies \underbrace{(1-r_n)}_{\text{invertierbar}} m_n = \sum_{i=1}^{n-1} r_i m_i$$
$$\implies m_n = \sum_{i=1}^{n-1} (1-r_n)^{-1} \cdot r_i m_i \quad ↯ \text{ zur Minimalität.}$$
$\square$

2. Ein Kriterium für Halbeinfachheit

Ziel: Kriterium für die Halbeinfachheit einer endl.-dim. k-Alg. ($\operatorname{char} k = 0$).

R wie oben.

Lemma 2.1. R habe endl. Länge als R-Modul.
$\implies \mathcal{J}(R)$ ist nilpotentes Ideal, d.h. $\exists N \in \mathbb{N}: \quad \mathcal{J}(R)^N = \{0\}$.
Insbesondere sind alle Elemente von $\mathcal{J}(R)$ nilpotent.

Beweis: $R \supset \mathcal{J}(R) \supset \mathcal{J}(R)^2 \supset \dots$ muss stationär werden.
$\implies \exists N: \quad \mathcal{J}(R)^{N+1} = \mathcal{J}(R)^N$.
$\overset{\text{Nakayama}}{\implies} \mathcal{J}(R)^N = \{0\}$.
$\square$

Lemma 2.2. Sei I ein Linksideal, das nur nilpotente El. enthält.
$\implies I \subset \ker(R \to \operatorname{End}_R(M)) \quad \forall$ einfachen R-Moduln M.
Insbesondere ist $\mathcal{J}(R)$ <u>das</u> maximale Element der Menge $\{I \text{ Linksideal} \mid \text{alle } r \in I \text{ nilpotent}\}$.

Beweis: Sei M einfacher R-Modul. Ang. $IM \neq \{0\}$. $\Rightarrow \exists m \in M: \; Im \neq \{0\}$.

Aber Im ist Untermodul von M $\overset{M \text{ einfach}}{\Longrightarrow}$ $Im = M$.

$\Longrightarrow$ $\exists x \in I: \quad xm = m$.

$\Longrightarrow$ $x^N m = m \;\; \forall n \geq 1$ $\lightning$ zu x nilpotent. $\square$

Lemma 2.3. R habe endl. Länge als R-Modul.
$\Longrightarrow$ $R/J(R)$ ist halbeinfach.

Beweis: Gilt: $R/J(R)$ ist halbeinfacher $R/J(R)$-Modul $\Longleftrightarrow$ $R/J(R)$ ist halbeinfacher R-Modul.

R hat endl. Länge $\Longrightarrow$ $J(R)$ ist Schnitt von nur endl. vielen max. Linksidealen $M_1, \dots, M_r$.
Chinesischer Restsatz:

$$R/J(R) \hookrightarrow \underbrace{R/M_1 \oplus \dots \oplus R/M_r}_{\text{halbeinfacher } R\text{-Modul}} \quad \text{als } R\text{-Moduln}$$

$\Downarrow$

halbeinfacher R-Modul
als R-Untermodul eines
halbeinfachen R-Moduls. $\square$

Kor. 2.4. In der Situation von Lemma 2.4 gilt: R halbeinfach $\Leftrightarrow$ $J(R) = \{0\}$.

Beweis: „$\Leftarrow$": Sofort aus Lemma 2.4.
„$\Rightarrow$": Schreibe $R = J(R) \oplus M$ für einen R-Modul $M \subset R$.

$\Longrightarrow$ $\exists\, x \in J(R)$, $m \in M$: $\quad 1 = x + m$ $\quad \Rightarrow \quad \underbrace{1-x}_{\substack{\text{invertierbar} \\ \text{(Lemma 1.4)}}} = m \quad \Rightarrow M = R$

$\Rightarrow J(R) = \{0\}$ $\square$

Ab jetzt: k Körper, A endl.-dim. k-Alg., immer assoziativ.

Def. 2.5. Für $a \in A$ sei $(a\cdot): A \longrightarrow A$, $\quad x \longmapsto ax$. Definiere $\forall a, b \in A$:

$$(a, b)_{tr} := tr\big((a\cdot) \circ (b\cdot): A \to A\big). \qquad \text{(Spurform)}$$

Einfache Eigenschaften:

1) $(\cdot,\cdot)_{tr}$ ist k-bilinear.

2) $(\cdot,\cdot)_{tr}$ ist symmetrisch, d.h. $\forall a,b\in A$: $(a,b)_{tr} = (b,a)_{tr}$.

3) $\forall a,b\in A$: $(a\cdot)\circ(b\cdot) = ((ab)\cdot)$, d.h. $(a,b)_{tr} = tr(((ab)\cdot))$.

4) A assoziativ $\Rightarrow \forall a,x,b\in A$: $(ax,b)_{tr} = (a,xb)_{tr}$

Beweis: Nur 2) ist z.z.: Wähle k-Basis von A. Für $f\in \mathrm{End}_k(A)$ sei M_f die Darstellungsmat. von f bzgl. der gewählten Basis.

$$\Longrightarrow M_{(a\cdot)\circ(b\cdot)} = M_{(a\cdot)}\cdot M_{(b\cdot)} \quad \forall a,b\in A.$$

Beh. folgt aus $tr(M_{(a\cdot)}M_{(b\cdot)}) = tr(M_{(b\cdot)}M_{(a\cdot)})$. □

Lemma 2.6. Sei $R(A) = \{a\in A \mid (a,b)_{tr} = 0 \ \forall b\in A\}$ das Radikal der Spurform.

Dann: 1) $R(A)$ ist beidseitiges Ideal von A.

2) $J(A)\subset R(A)$.

Beweis: 1) Sei $a\in R(A)$, $x,b\in A$. $\Rightarrow (ax,b)_{tr} = (a,xb)_{tr} = 0 \Longrightarrow ax\in R(A)$.

Analog $xa\in R(A)$.

2) A endl.-dim. $\Longrightarrow$ A hat endl. Länge als k-Modul/VR.

$\overset{\text{Lemma 2.1}}{\Longrightarrow}$ jedes El. von $J(A)$ ist nilpotent

$\forall a\in J(A), \forall b\in A$: $ab\in J(A)$, also nilpotent. Beh. folgt aus „Spur nilpotenter Endomorphismen ist 0". □

Kor. 2.7. Spurform ist nicht-ausgeartet ($\overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} R(A) = \{0\}$) $\Longrightarrow$ A halbeinfach.

Satz 2.8. Falls $\mathrm{char}(k) = 0$, dann $R(A) = J(A)$. Insbesondere:

A halbeinfach $\Longleftrightarrow$ Spurform nicht-ausgeartet.

Vorbemerkung: Sei V endl.-dim. k-VR, $\mathrm{char}(k) = 0$. Sei $f\in \mathrm{End}(V)$. Dann:

$$f \text{ nilpotent} \Longleftrightarrow tr(f^m) = 0 \ \forall m\geq 1.$$

Beweis: „⇐": Ang. f habe Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \bar{k} \setminus \{0\}$. Sei $\nu_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ die alg. Vfh. von λ_i (insbes. $\lambda_i \neq \lambda_j \ \forall i \neq j$).

Gilt $tr(f^m) = \nu_1 \lambda_1^m + \dots + \nu_r \lambda_r^m = 0 \quad \forall m \geq 1$. Also:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_r \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^r & \dots & \lambda_r^r \end{pmatrix}}_{=: M} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Aber $\det(M) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_r \cdot \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{r-1} & \dots & \lambda_r^{r-1} \end{pmatrix}}_{\neq 0, \text{ Vandermonde-Mat.}} \neq 0 \Rightarrow (*)$ hat nur die Lsg. $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ↯

„⇒": Char. Pol. nilpotenter Matrizen ist t^n. □

Beweis von Satz 2.8. Sei $a \in R(A)$.

$\Rightarrow \forall m \geq 0: \quad (a, a^m)_{tr} = tr((a^{m+1})\cdot) = 0 \overset{\text{Vorbem.}}{\underset{\text{char } k = 0}{\Longrightarrow}} a$ nilpotent

$\Rightarrow R(A)$ ist Linksideal, das nur nilpot. El. enthält

$\overset{\text{Lemma 2.2}}{\Longrightarrow} R(A) \subset J(A)$. □

Beispiel: 1) Für $B \in M_n(k)$ gilt $tr(B\cdot) = n \cdot tr(B)$. Wenn $B \neq 0$ nilpotent ist, wähle $S \in GL_n(k)$ s.d. $S^{-1}BS =: B' = (b_{ij}')$ in oberer Δ-Form ist und $b_{12}' = 1$.

$\Rightarrow B \in R(M_n(k)) \iff B' \in R(M_n(k))$, da $R(M_n(k))$ beidseitiges Ideal.

Zeige $B' \notin R(M_n(k))$:

$$B' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & * \\ & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow tr\left(\begin{pmatrix} 0 & \\ 1 & \\ 0 & 0 \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} B'\right) = tr\left(\begin{pmatrix} 1 & \\ 0 & \\ \vdots & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}\right) = 1 \Rightarrow B \notin R(M_n(k)).$$

$\Longrightarrow J(M_n(k)) = \{0\}$, und in $char(k) = 0$ auch $R(M_n(k)) = \{0\}$.

2) Sei $T \subset M_n(k)$ die Alg. der oberen Δ-Mat., $char(k) = 0$.

Gilt: Falls $B \in T$ nilpotent, $C \in T \Rightarrow BC$ nilpotent $\Rightarrow (B, C)_{tr} = n \cdot tr(BC) = 0$

$\Rightarrow R(T) = \{B \in T \mid B^n = 0\}$

$\Rightarrow T$ nicht halbeinfach