Rekurrente Doppelfolgen über endlichen Mengen

Mihai Prunescu

Bielefeld, 18. Februar 2011

Berlin, 21. Februar 2011

MOTTO

.... wir haben die Kunst, damit wir nicht an der Wahrheit zugrunde gehen .....

Friedrich Nietzsche

Definition

$(A, f, 1)$: A endlich, $f : A^3 \to A$, $1 \in A$

Rekurrente Doppelfolge $(a(i,j))$:

- $\forall i \ \ \forall j \ \ a(i,0) = a(0,j) = 1$

- $i > 0 \ \wedge \ j > 0$:

$$a(i,j) = f(a(i-1,j), a(i-1,j-1), a(i,j-1))$$

$f(x, y, z)$ agiert folgendermaßen:

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "y"] & 1 \arrow[d, "z"] \arrow[dr, "y"] & 1 \arrow[d, "z"] \arrow[dr, "y"] & 1 \arrow[d, "z"] \\
1 \arrow[r, "x"] \arrow[dr, "y"] & A \arrow[r, "x"] \arrow[d, "z"] \arrow[dr, "y"] & B \arrow[r, "x"] \arrow[d, "z"] \arrow[dr, "y"] & C \arrow[d, "z"] \\
1 \arrow[r, "x"] \arrow[dr, "y"] & D \arrow[r, "x"] \arrow[d, "z"] \arrow[dr, "y"] & E \arrow[r, "x"] \arrow[d, "z"] \arrow[dr, "y"] & F \arrow[d, "z"] \\
1 \arrow[r, "x"] & G \arrow[r, "x"] & H \arrow[r, "x"] & I
\end{tikzcd}
$$

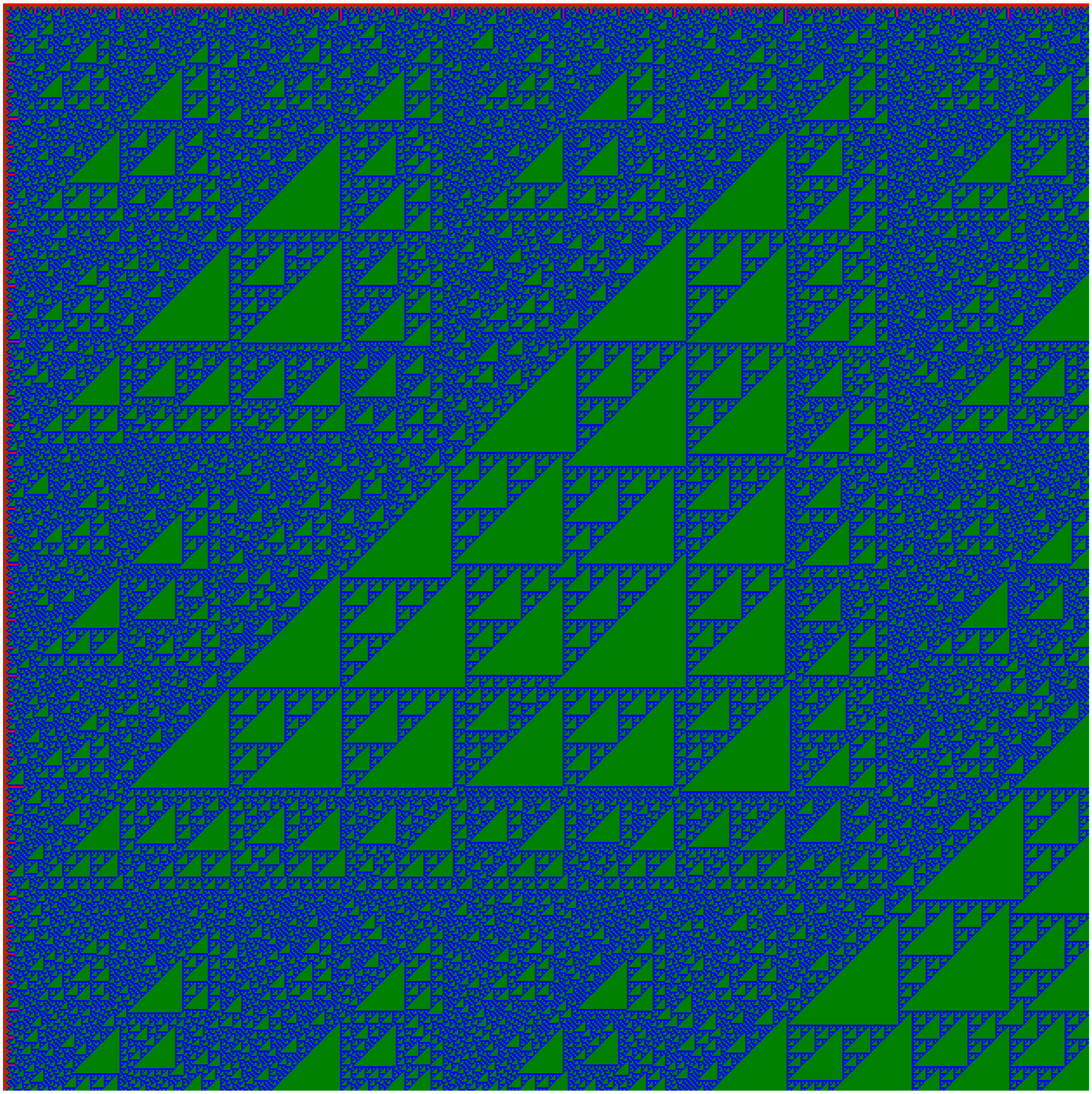
$$f(1, 1, 1) = A$$

$$f(A, 1, 1) = B$$

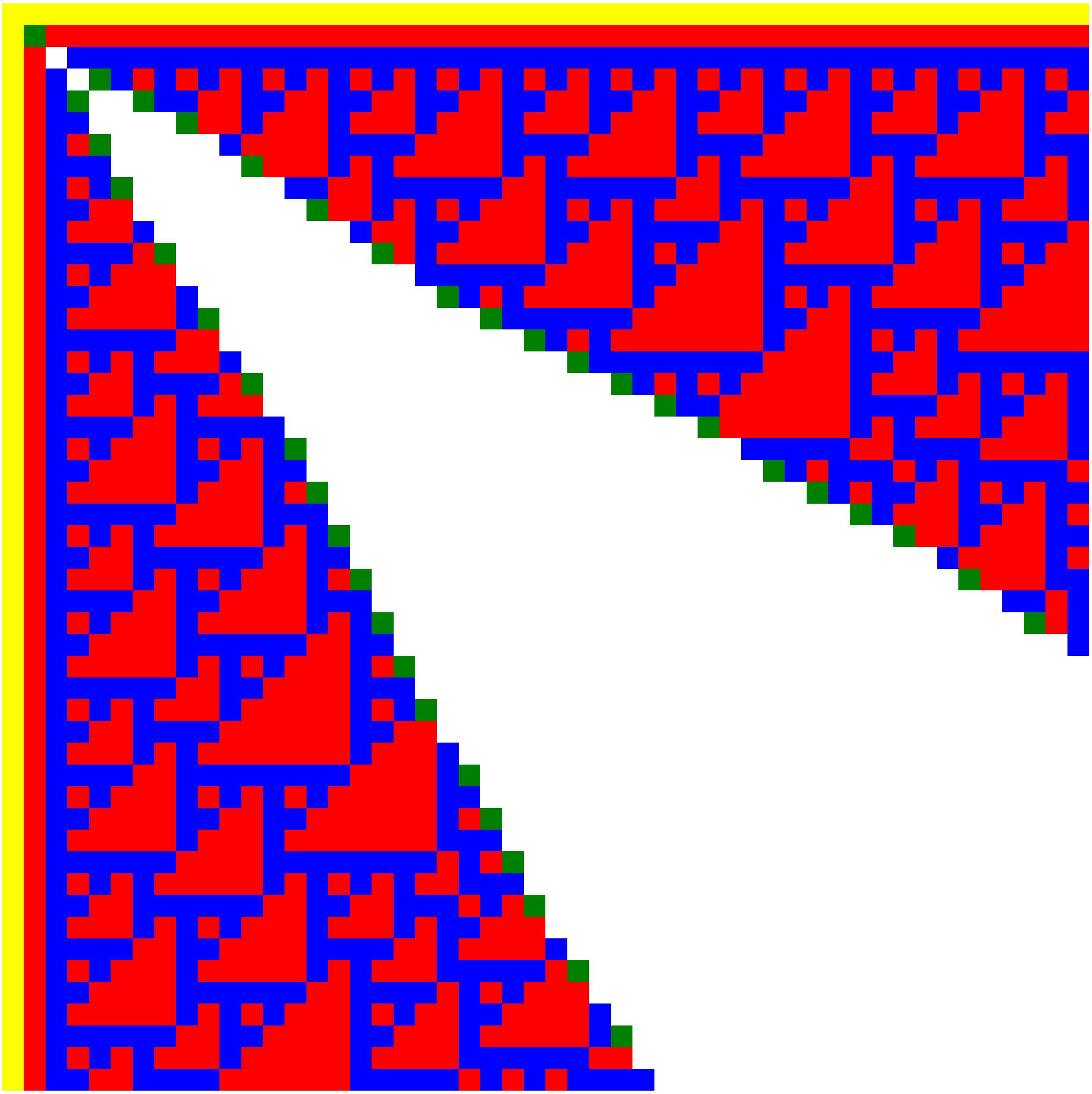
$$\ldots$$

$$f(D, A, B) = E$$

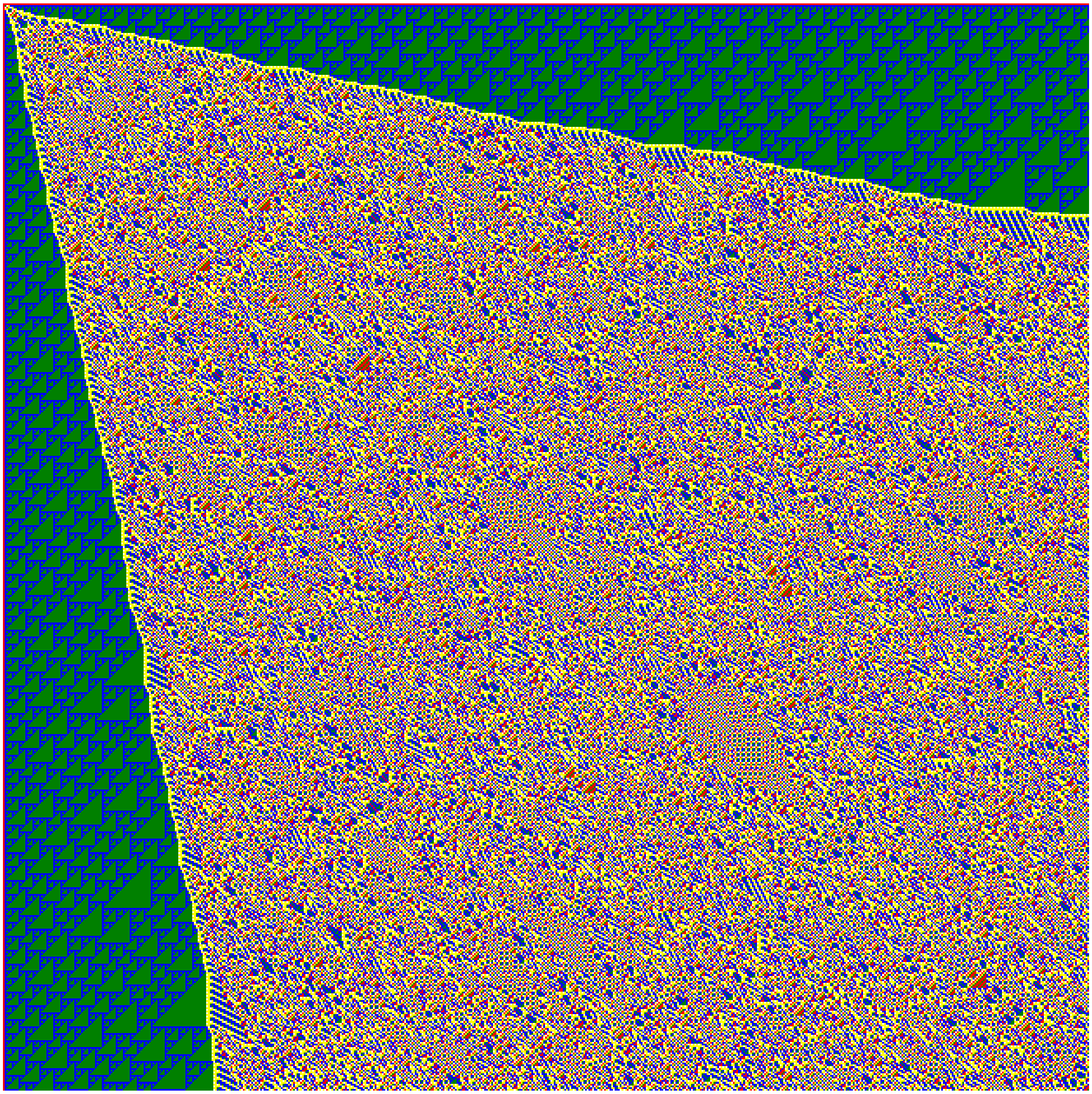
$$\ldots$$



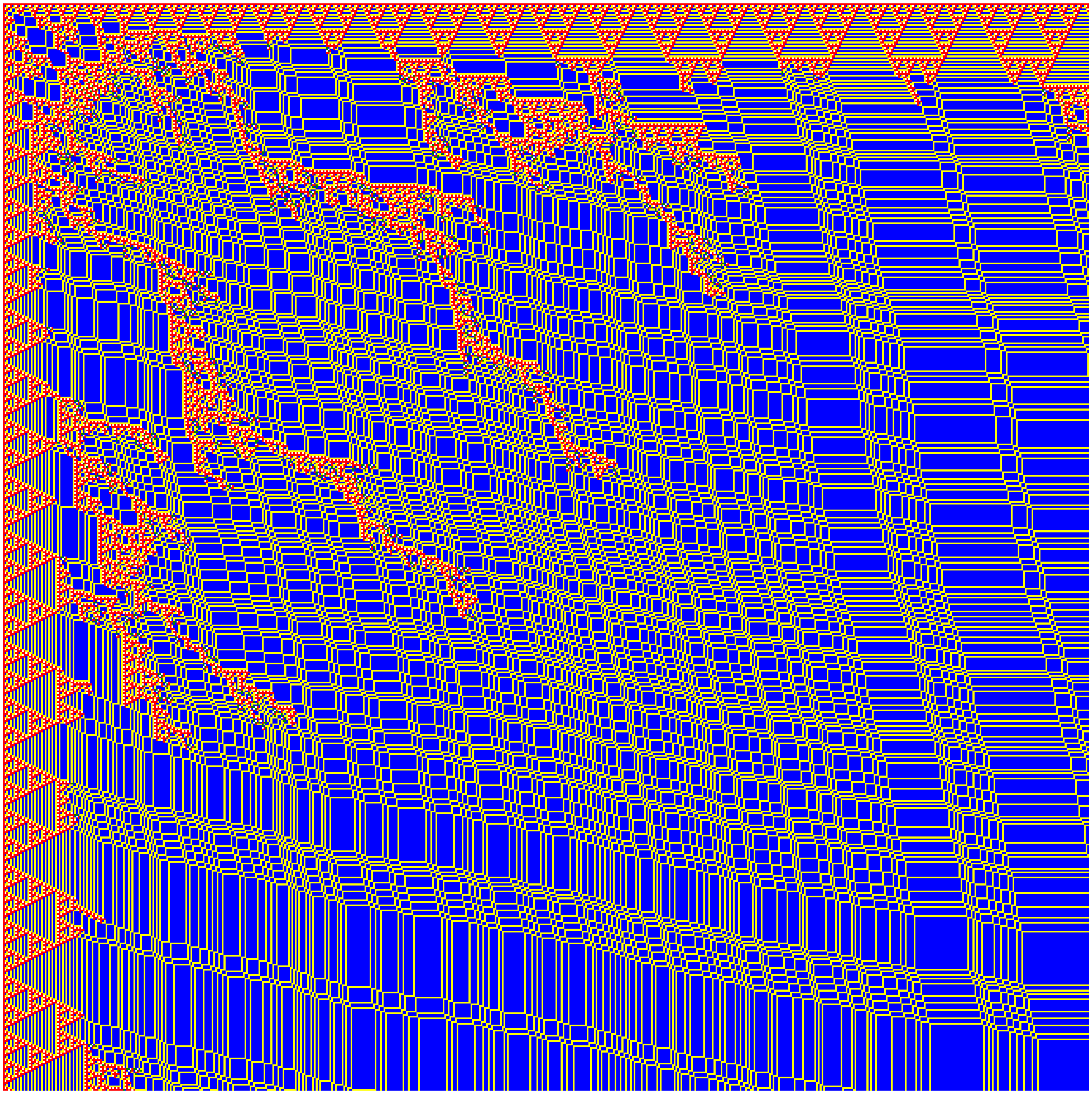
$(\mathbb{F}_5, 4x^2y^4z^2 + 4x^4y^3 + 4y^3z^4 + 2xy^2z + 3, 1)$



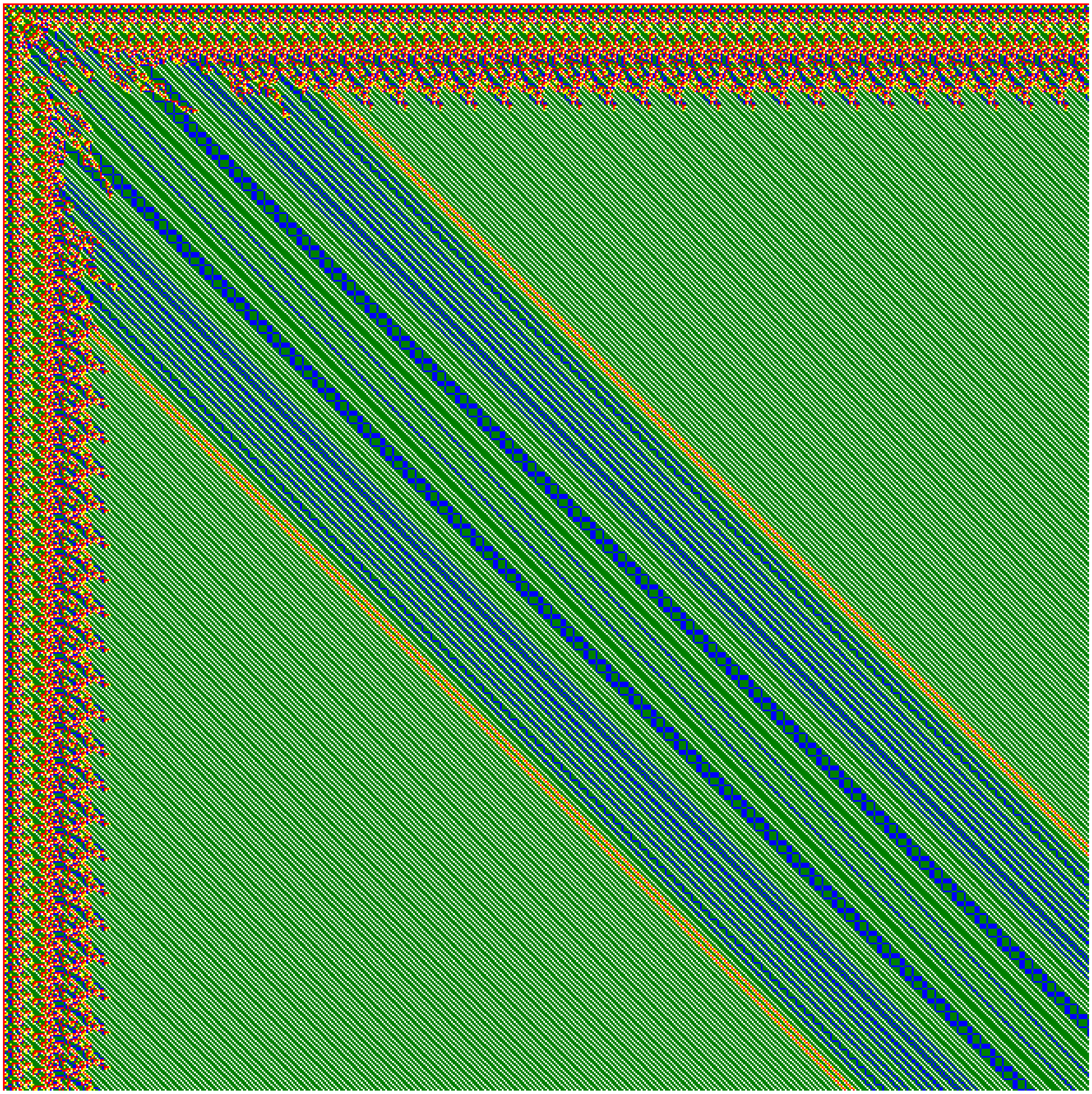
$(\mathbb{F}_5, 4x^4z^4 + 4x^2y^2 + 4y^2z^2 + 4y^2, 2)$



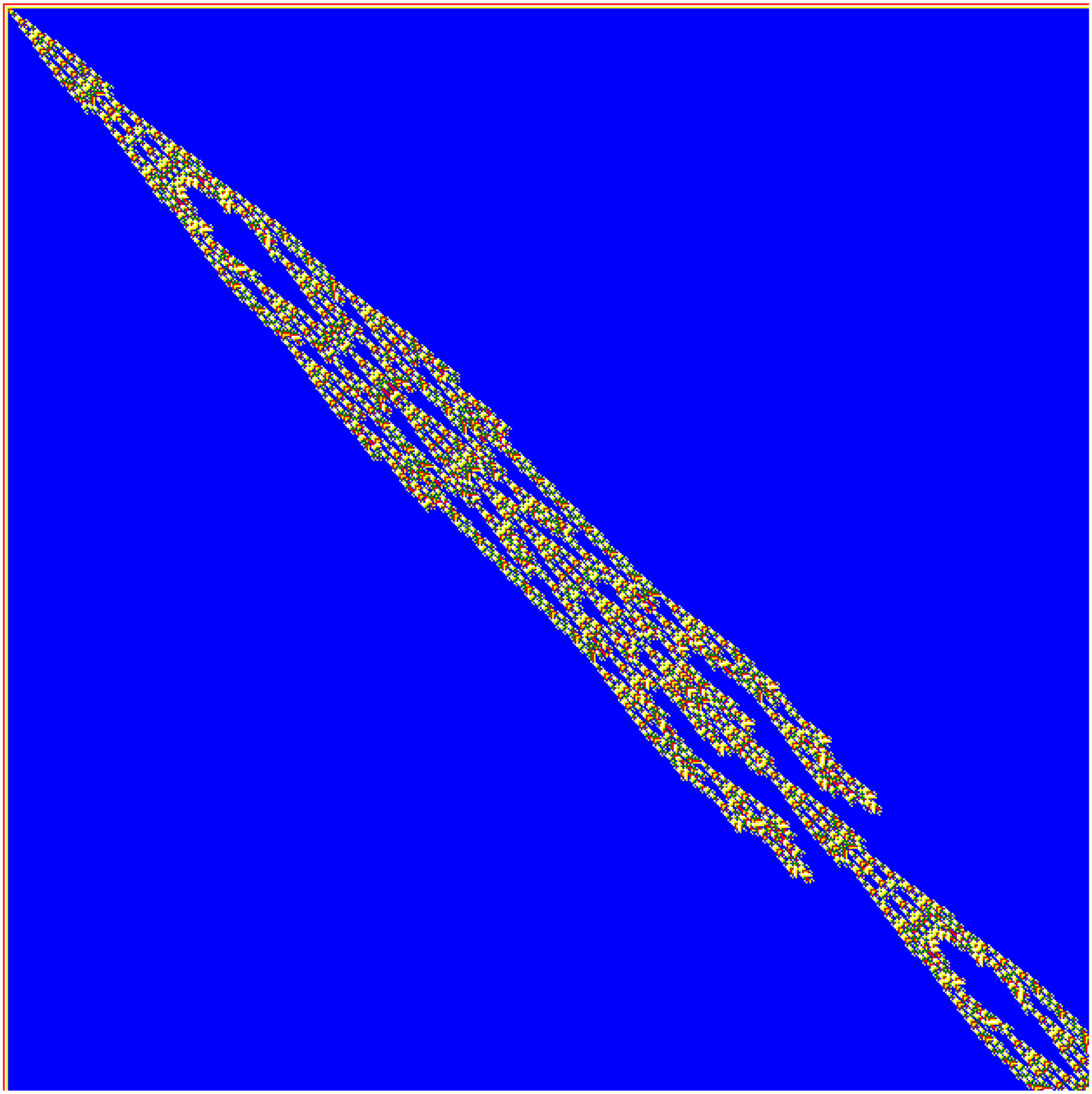
$(\mathbb{F}_5, 3x^4z^4 + 3x^2y^2 + 3y^2z^2 + 2x^3yz^3 + 1, 1)$



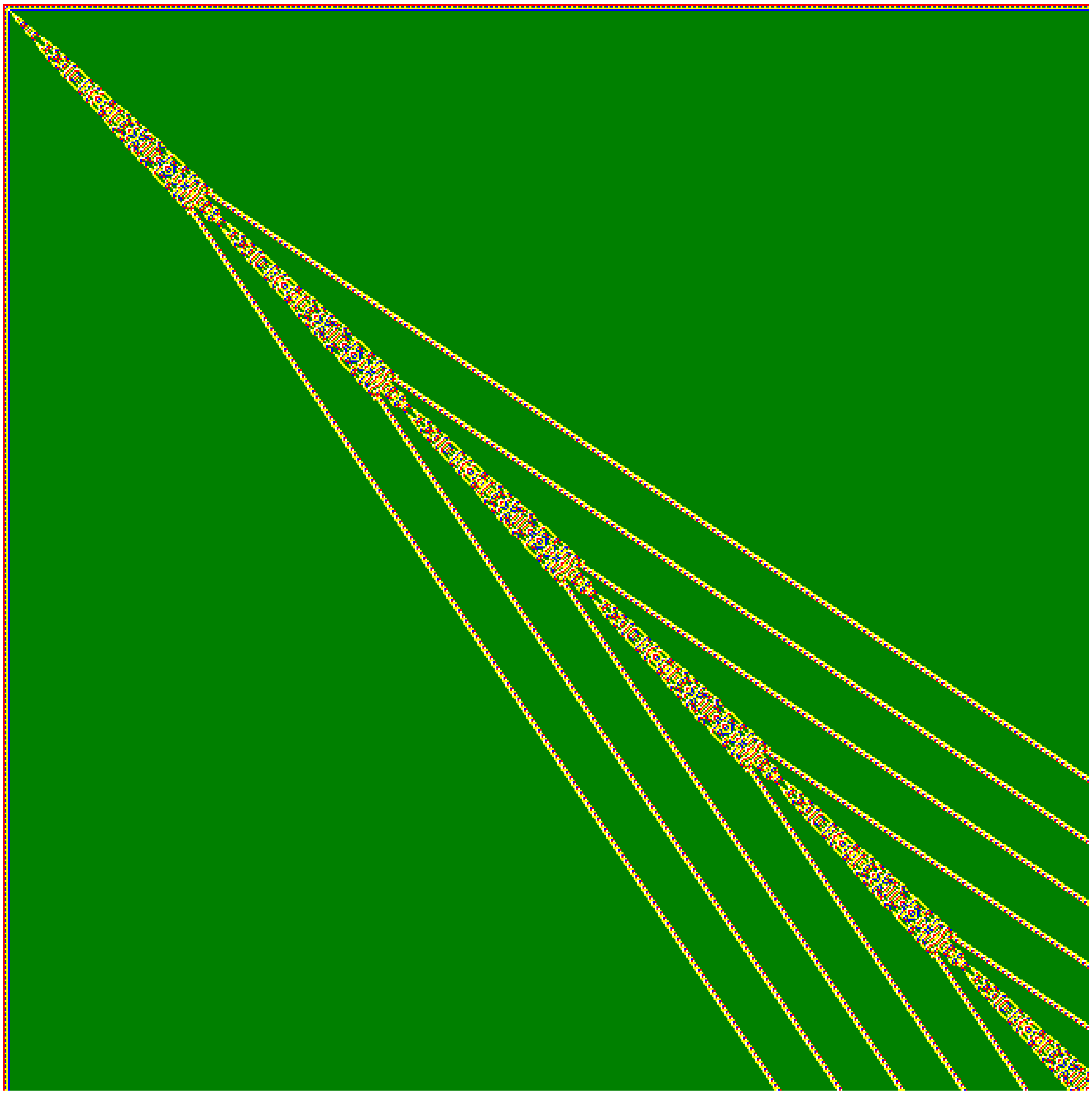
$(\mathbb{F}_5, 4x^4z^4 + 4x^2y^2 + 4y^2z^2 + 4x^3y^2z^3 + 2, 1)$



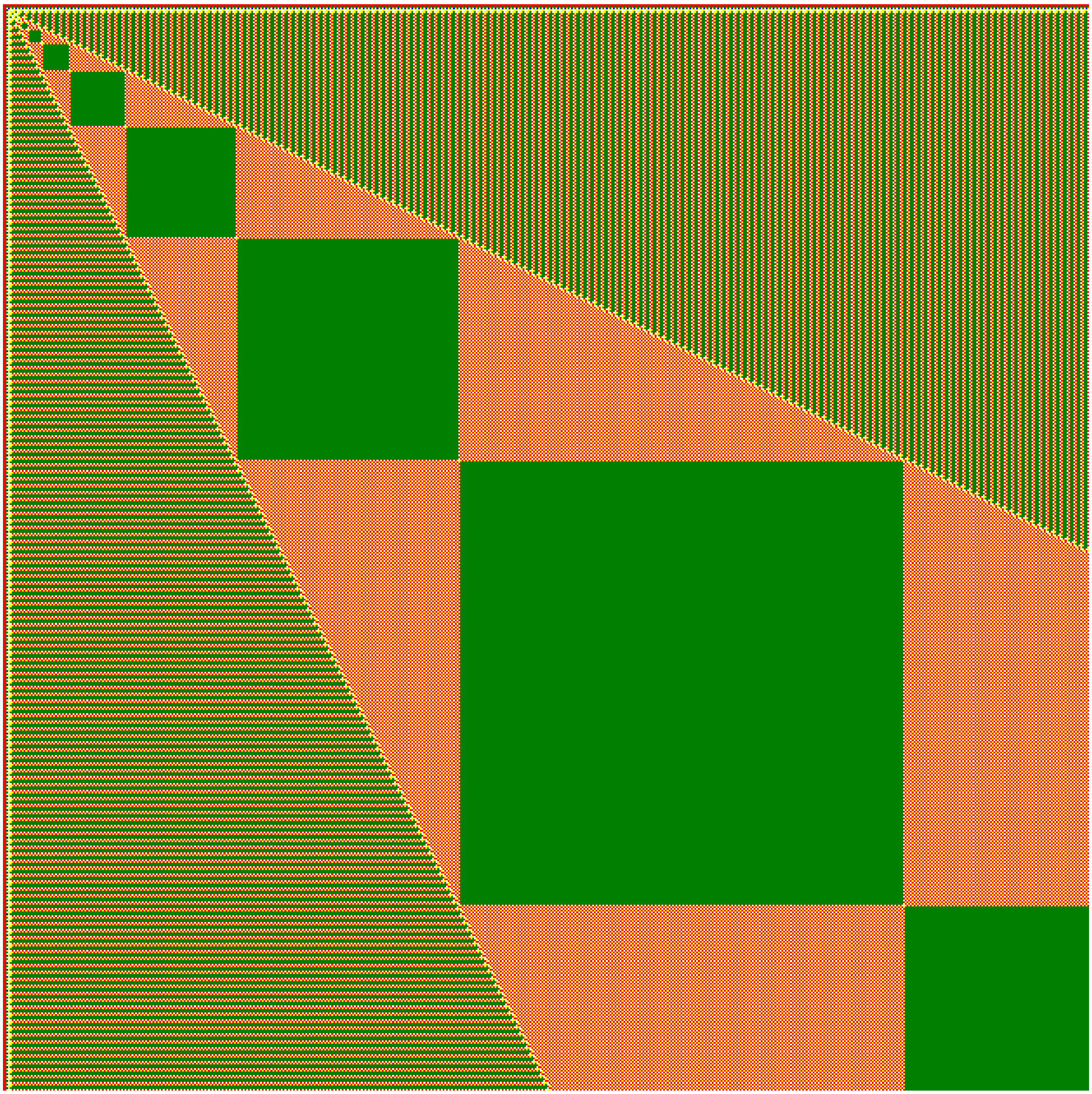
$$(\mathbb{F}_5, 2x^3y^3z^3 + 2x^2 + 2z^2 + 4xy^3z + 4, 1)$$



$(\mathbb{F}_5, x^2y^3z^2 + x^4y^2 + y^2z^4 + 3x^3y^3z^3 + 4, 1)$



$(\mathbb{F}_5, 2x^3y^2z^3 + 2x^3y^3 + 2y^3z^3 + 3x^4z^4 + 1, 1)$



$(\mathbb{F}_5, 3x^3y^2z^3 + 3x^3y^3 + 3y^3z^3 + 4x^2y^2z^2 + 4, 1)$

Turing Vollständigkeit

$(A, f : A^2 \to A, 0, 1)$

$a(i,j) = f(a(i, j-1), a(i-1, j))$

Theorem 1 $\forall$ (M, w) *Turing Maschine mit Eingabe* $\exists$ $\mathfrak{A} = (A, f, 0, 1)$ *endlich, kommutativ, sodass:*

$(a(i,j))$ *letztendlich Null*

$$\Longleftrightarrow$$

M *hält mit leerem Band, ohne links von der Startzelle gewesen zu sein.*

M. P: *Undecidable properties of the recurrent double sequences*. Notre Dame Journal of Formal Logic, 49, 2, 143 - 151, 2008.

a, b, c, d Buchstaben

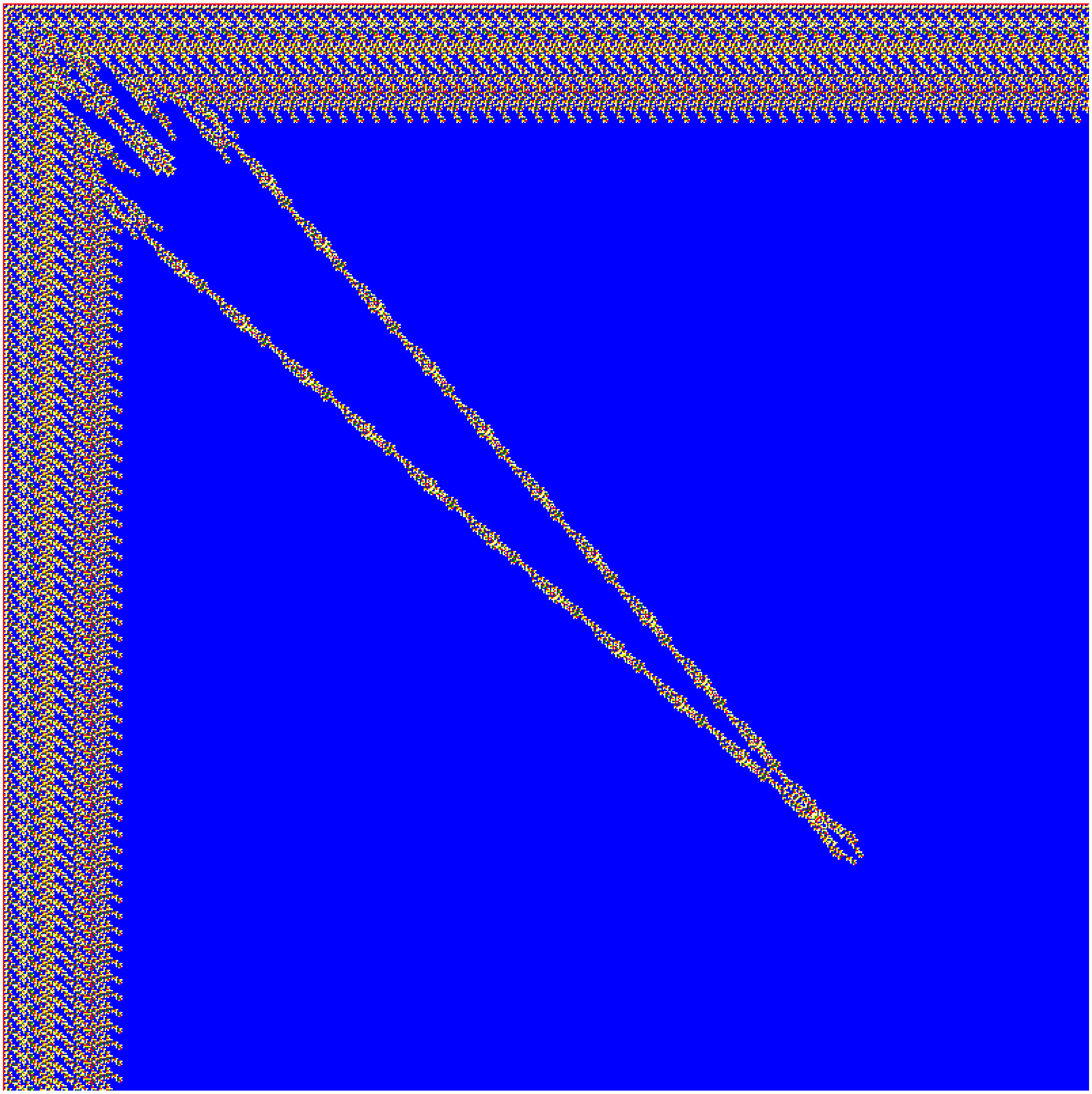
z Zustand

$\delta = (c, z)$ neuer Buchstabe

$$\begin{array}{cccc} & & & b \\ & & \delta & (\delta, b) \\ & a & (a, \delta) & d \end{array}$$

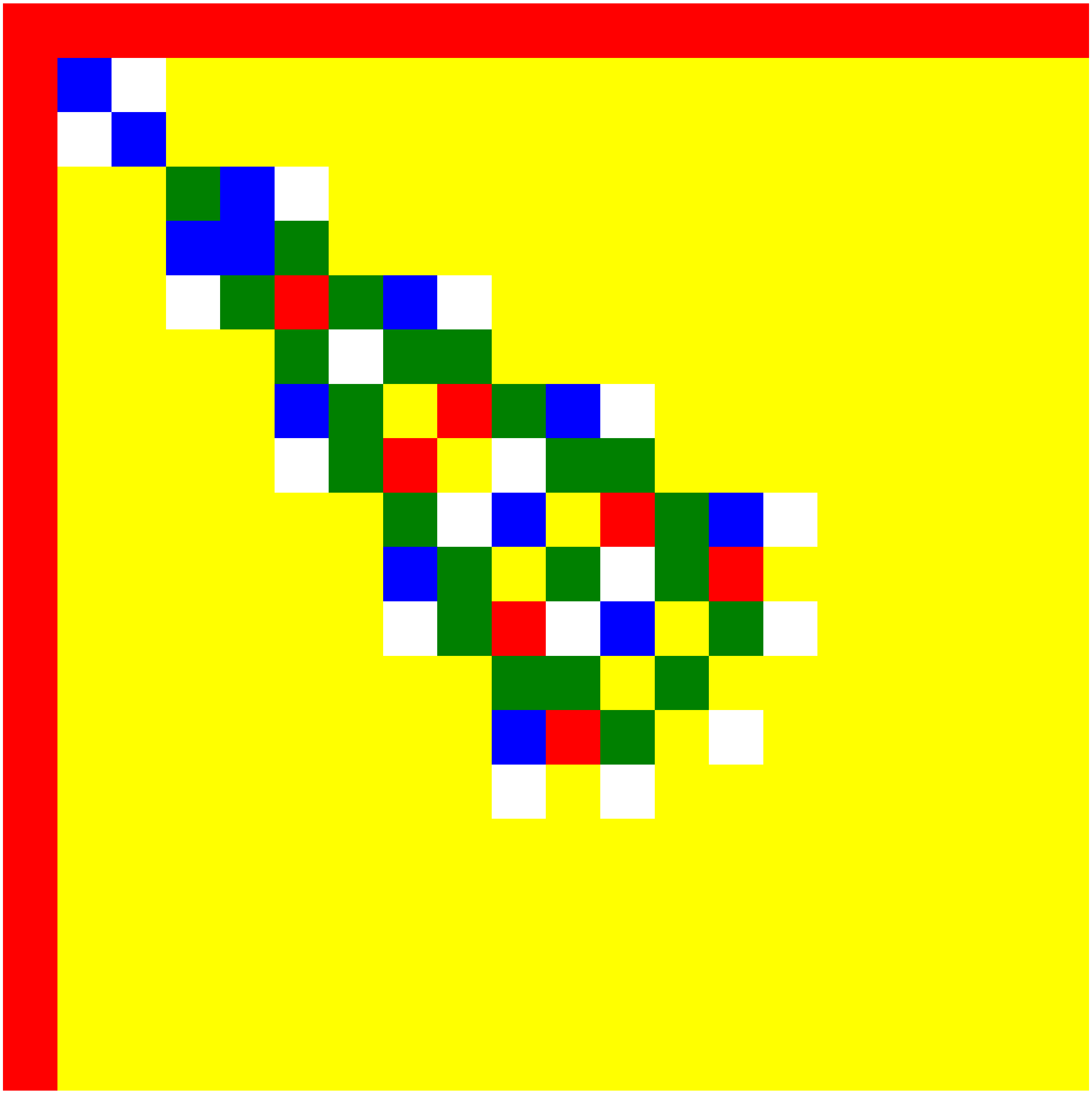
Um eine kommutative Struktur zu bauen, verwendet man 8 Diagonalen, statt nur 2.

"Anhaltende Berechnung 1", 625×625



$(\mathbb{F}_5, 4x^4z^4 + 4xy^3 + 4y^3z + 4xy^3z + 4, 1)$

"Anhaltende Berechnung 2", 20×20



$(\mathbb{F}_5, x^4z^4 + x^2y^4 + y^4z^2 + 2xyz + 3, 1)$

Normierung

$(A, f, 1)$ erzeugt a, $(B, g, 1)$ erzeugt b.

$M(a) = \{x \in A \,|\, \exists\, i, j \quad a(i, j) = x\}$.

$a \simeq b$: $\exists$ Bijektion $\varphi : M(a) \to M(b)$ so dass $\forall\; i, j\;\; \varphi(a(i, j)) = b(i, j)$.

$c : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ die Cantorsche Paarung,

$d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$, $d = c^{-1}$.

$a(d(0))$, $a(d(1))$, $\ldots$, $a(d(n))$, $\ldots$

Das Startsymbol ist 0, das erste Element $\neq 0$, das in der Folge autritt, ist 1, u.s.w.

$N(a)$ sei die Normierung von a.

$a \simeq b \Longleftrightarrow N(a) = N(b)$.

Chaitin Komplexität

a eine rekurrente Doppelfolge.

$(A, f, 0)$ erzeugt a.

Das minimale Programm von a ist die lexikographisch geordnete Liste aller $f(a, b, c) = d$, die in a *wirklich* vorkommen. $\square$

RDS Menge aller rekurrenten Doppelfolgen.

W Menge aller Wörter über dem Alphabet:

$$0\ 1\ \ldots\ 9\ f\ )\ (\ ,\ =$$

$\mu : RDS \to W$,

$\mu(a) =$ das minimale Programm für A.

$\mu : RDS \to W$ total definiert

$\mu : RDS \to W$ nicht berechenbar

$N(\mu(RDS))$ präfixfrei

TRICK: Das Normierungsverfahren ist effektiv für minimale Programme. Man benennt Buchstaben um, bis man alle Buchstaben umbenannt hat, die im minimalen Programm vorkommen.

$C(a) =$ Länge$(\mu(a))$ Komplexitätsmass

$H(a) = -\log P[N(\mu((A, f, 0))) = N(\mu(a))]$

Am häufigsten kommt die konstante Doppelfolge vor, die das minimale Programm $f(0, 0, 0) = 0$ hat.

Was ist mit der *inneren Entropie*?

Versuch, einen inneren Entropiebegriff zu definieren

Die random Folgen sind *normal*, alle endliche Wörter kommen unendlich oft vor, uniform verteilt in der Folge.

Es gibt auch berechenbare normale Folgen, wie die von Champernowne:

$$01234567891011121314151617\ldots$$

Die innere Entropie will messen, wie *normal* eine rekurrente Doppelfolge ist.

$[m] = \{0, 1, \ldots, m-1\}$

$\Box A = \{b : [m]\times[m] \to A \,|\, m \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{m\geq 1} A^{m\times m}$

$b \in A^{m\times m}$ kommt regulär in d vor, falls $\exists\ i, j$:

$$\forall\ u, v \in [m]\ b(u, v) = d(mi + u, mj + v)$$

$a\,|\,[n] \times [n] := a\,|\,n$

$\mathcal{H} : \Box A \to \mathbb{R}$

$\alpha_n(b) = \#$ reguläre Kopien von b in $a\,|\,n$.

$\mathcal{H}(b) = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_n(b)}{(n/m)^2}$

Wenn eine Doppelfolge m-normal ist, dann gilt $\mathcal{H}(b) = (\#A)^{(-m^2)}$ für jedes b von Größe $m \times m$.

Chomski Grammatiken

Typ 0, allgemein. Alle rekursiv-aufzählbaren Sprachen werden von solchen Grammatiken erzeugt.

Typ 1, kontext-sensitiv.

Typ 2, kontext-frei.

Typ 3, regulär.

Erlauben die rekurrenten Doppelfolgen solche qualitative Unterschiede?

Selbstähnliche Doppelfolgen

$(\mathbb{F}_q, f(x,y,z) = x + my + z, 1)$

$F = (a(i,j) \mid 0 \leq i,j < p),\ q = p^s$

$\varphi(x) = x^p$ Frobenius Automorphismus

$G_d = (a(i,j) \mid 0 \leq i,j < p^d)$

Theorem 2

$$G_d = \varphi^{d-1}(F) \otimes \varphi^{d-2}(F) \otimes \cdots \otimes \varphi(F) \otimes F$$

Falls $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p$, gilt $G_d = F^{\otimes d}$. Beginne mit 1 und wende Regeln der Gestalt

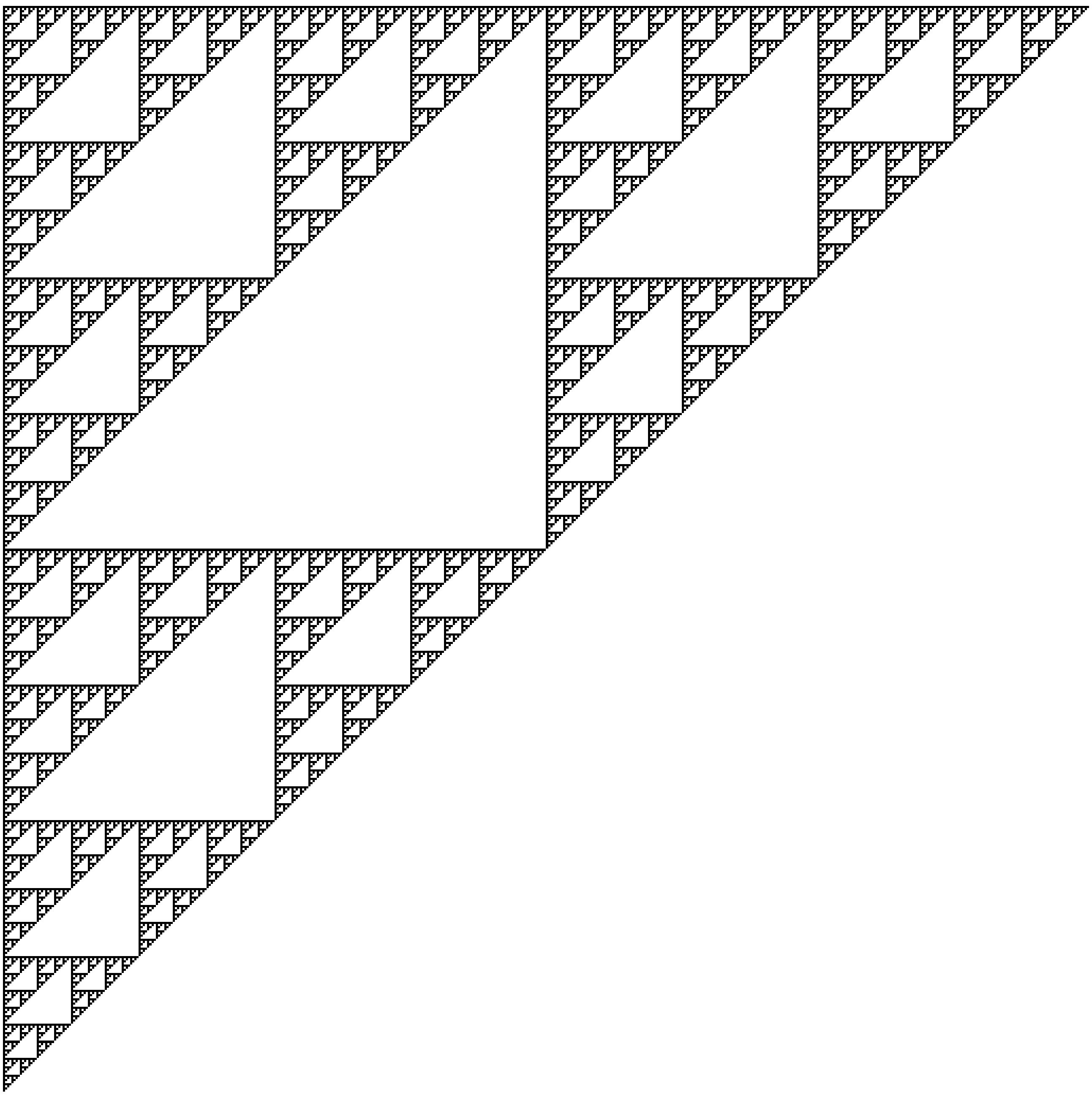
$$element \to matrix$$

$$a \to aF$$

an. Die Matrixfolge (G_d) konvergiert zu einem selbstähnlichen Muster.

M. P: *Self-similar carpets over finite fields*. European Journal of Combinatorics, 30, 4, 866 - 878, 2009.

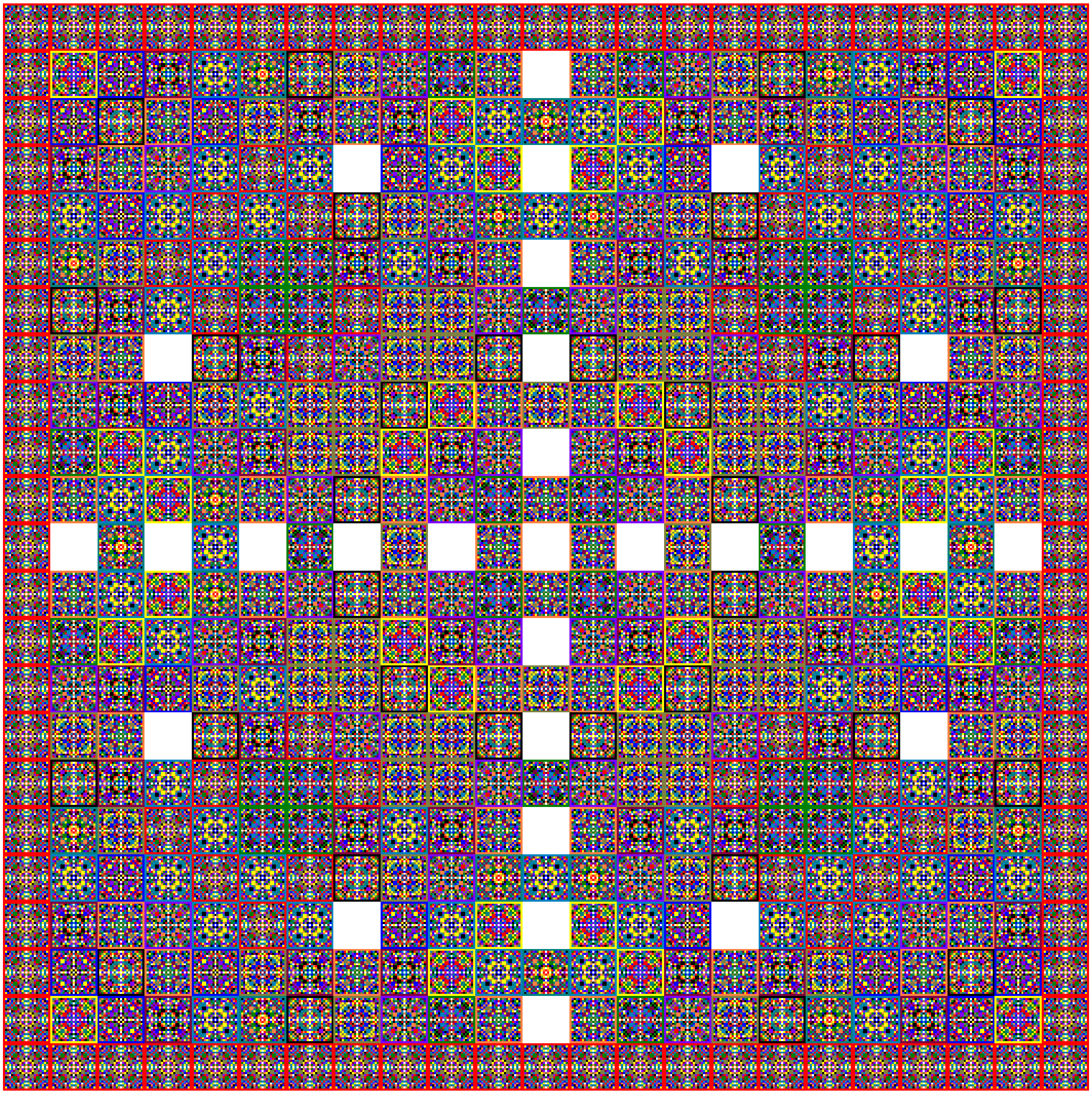
Pascalsche Dreieck mod 2



$(\mathbb{F}_2, x+z, 1),\ d=9$

$$1 \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad 0 \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lakhtakia - Passoja Teppich mod 23



$$(\mathbb{F}_{23}, x+y+z, 1),\ d=2$$

$$G_2\text{: } \forall\, k \in \mathbb{F}_{23} \ \ \text{Farbe}(k) = \text{Farbe}(23-k)$$

Substitution

[*element* $\to$ *matrix*] $\rightsquigarrow$ [*matrix* $\to$ *matrix*]

$x \geq 1$ Grundkörnung

$s \geq 2$ Skalierung, $y = xs$

$\mathcal{X} \subset A^{x \times x}$ endlich

$\mathcal{Y} \subset A^{y \times y}$ endlich

$\forall\ Y \in \mathcal{Y} \quad Y = (X(i,j) \in \mathcal{X} \mid 0 \leq i,j < s)$

$\Sigma : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ Substitutionsregel

$X_1 \in \mathcal{X}$ Startsymbol

$(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \Sigma, X_1)$ Substitutionssystem

$S(1) = X_1$, $S(n) = \Sigma^{n-1}(X_1)$

Expansive Substitutionssysteme

$(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \Sigma, X_1)$ expansiv, falls

$\Sigma(X_1) = (X(i,j) \in \mathcal{X}) \models X(0,0) = X_1$

Lemma 3 *Sei* $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \Sigma, X_1)$ *ein expansives Substitutionssystem. Dann ist für alle* $n > 0$ *die Matrix* $S(n)$ *das* $xs^{n-1} \times xs^{n-1}$ *links obere Eck der Matrix* $S(n+1)$*.*

$$S(n+1) = \begin{pmatrix} S(n) & U \\ V & W \end{pmatrix}$$

Sei $T \in A^{wx \times zx}$ eine Matrix.

Definition:

$\mathcal{N}_x = \{K \in A^{2x \times 2x} \,|\, K$ kommt in T vor und startet mit Koordinaten $(kx, lx)\}$

Theorem 4 $(A, f,$ *Ränder* $) \rightsquigarrow R$

$(A, \mathcal{X}, \mathcal{Y}, \Sigma, X_1)$, $x \to sx$, $\rightsquigarrow S$

$R(n) := (a(i,j) \,|\, 0 \leq i, j < xs^{n-1})$

Falls *existiert* $m > 1$, *sodaß:*

- $R(m) = S(m)$

- $\mathcal{N}_x(S(m-1)) = \mathcal{N}_x(S(m))$

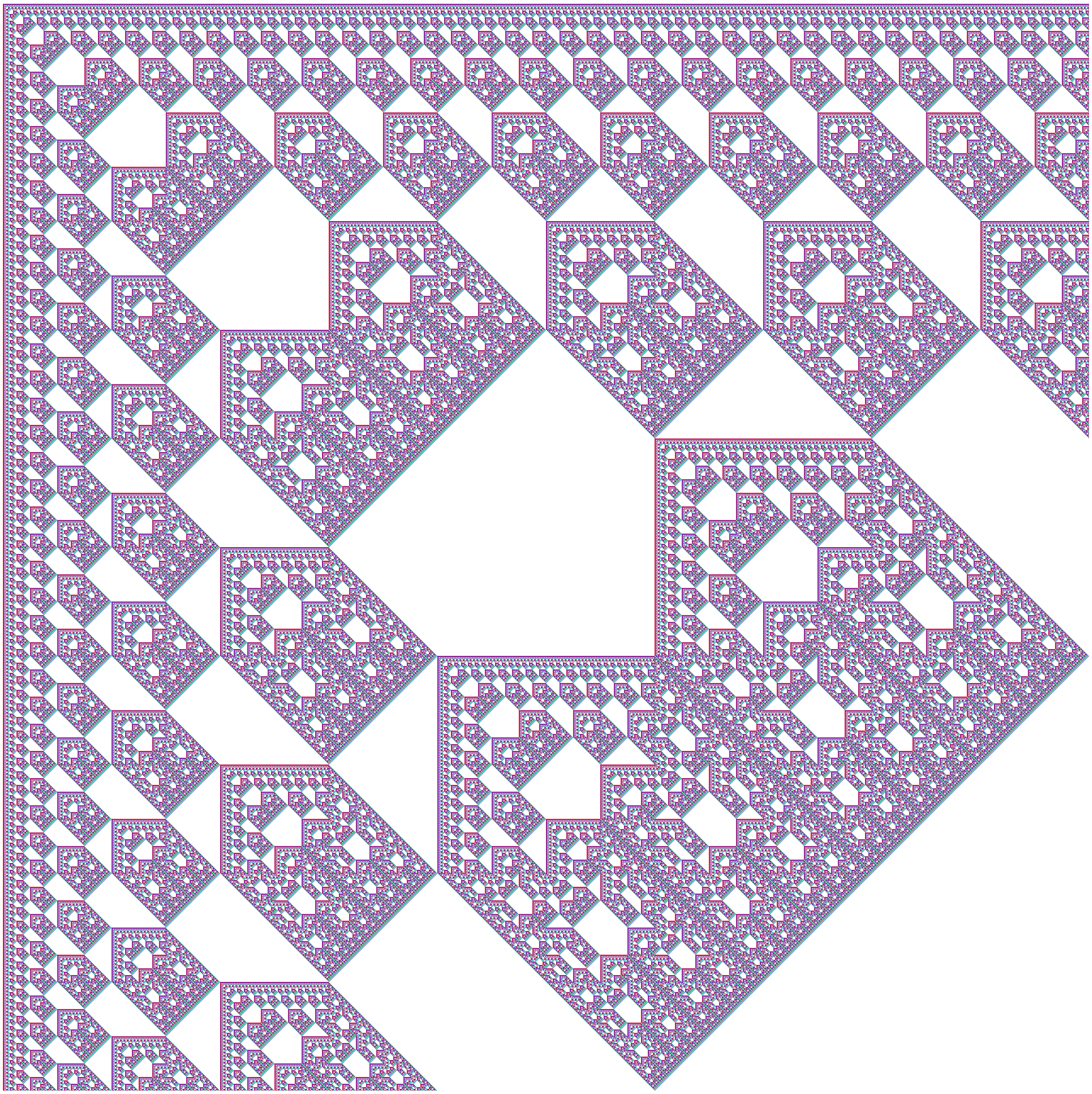
- $S \,|\, (i = 0) = R \,|\, (i = 0)$

- $S \,|\, (j = 0) = R \,|\, (j = 0)$

Dann *gilt* $R = S$.

M. P: *Recurrent double sequences that can be produced by context-free substitutions.* Fractals, Vol 18, Nr. 1, 1 - 9, 2010.

Twin Peaks, 2560×2560.



$$\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \epsilon, \epsilon^2 = \epsilon + 1\} = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$(\mathbb{F}_4, y + \epsilon(x + z) + \epsilon^2(x^2 + y^2 + z^2), 1)$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X_2 & X_2 \\ X_5 & X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X_3 & X_6 \\ X_3 & X_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X_7 & X_1 \\ X_1 & X_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X_8 & X_1 \\ X_{10} & X_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_6 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X_{11} & X_{10} \\ X_1 & X_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X_7 & X_7 \\ X_7 & X_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X_8 & X_7 \\ X_{12} & X_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_9 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X_9 & X_{12} \\ X_{12} & X_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X_9 & X_{10} \\ X_{10} & X_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_7 & X_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X_{13} & X_{14} \\ X_{15} & X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X_{13} & X_6 \\ X_5 & X_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X_3 & X_{14} \\ X_{11} & X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_{15} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} X_2 & X_8 \\ X_{15} & X_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vermutung

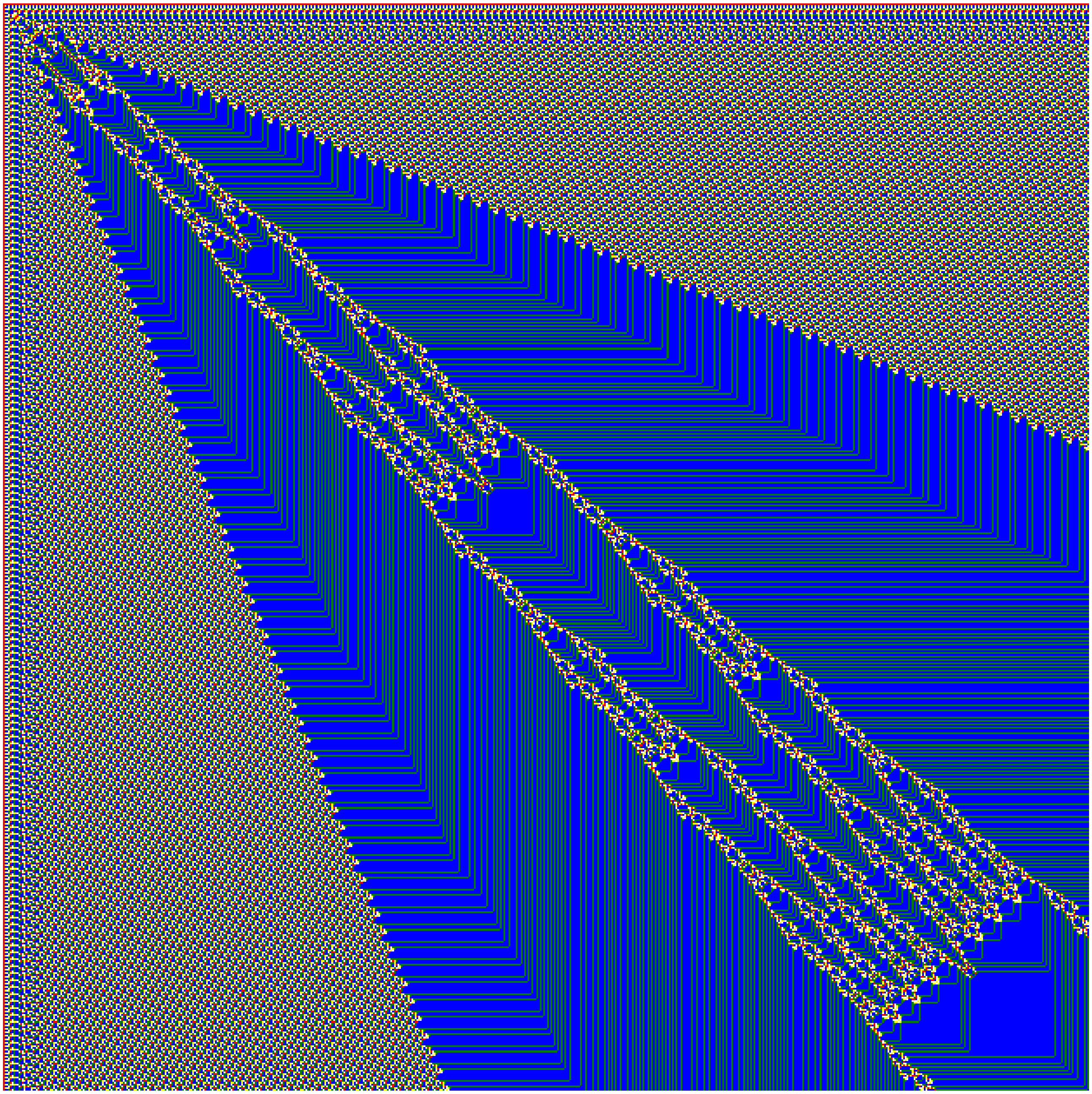
G endliche abelsche p-Gruppe, p Primzahl

$f : G^3 \to G$ Gruppenhomomorphismus

$a \in G \setminus \{0\}$

Dann existiert ein expansives Substitutions-system, das dieselbe Doppelfolge produziert, wie (G, f, a).

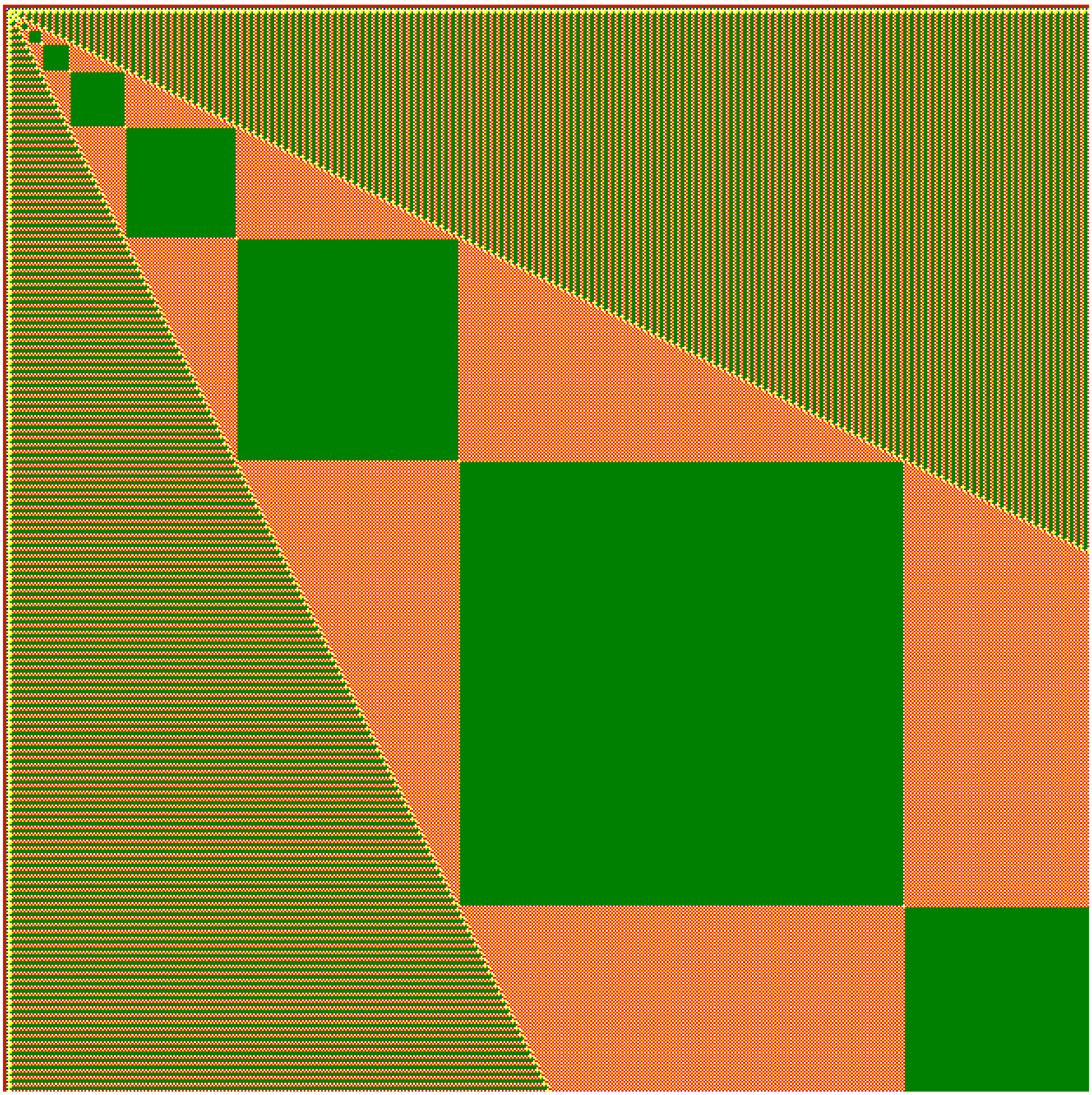
Efeu, 625×625



$$(\mathbb{F}_5, x^3z^3 + x^4y + yz^4 + 2xyz + 4, 1)$$

1802 Regeln $256 \rightarrow 512$

Square Root, 625×625



$(\mathbb{F}_5, 3x^3y^2z^3+3x^3y^3+3y^3z^3+4x^2y^2z^2+4, 1)$

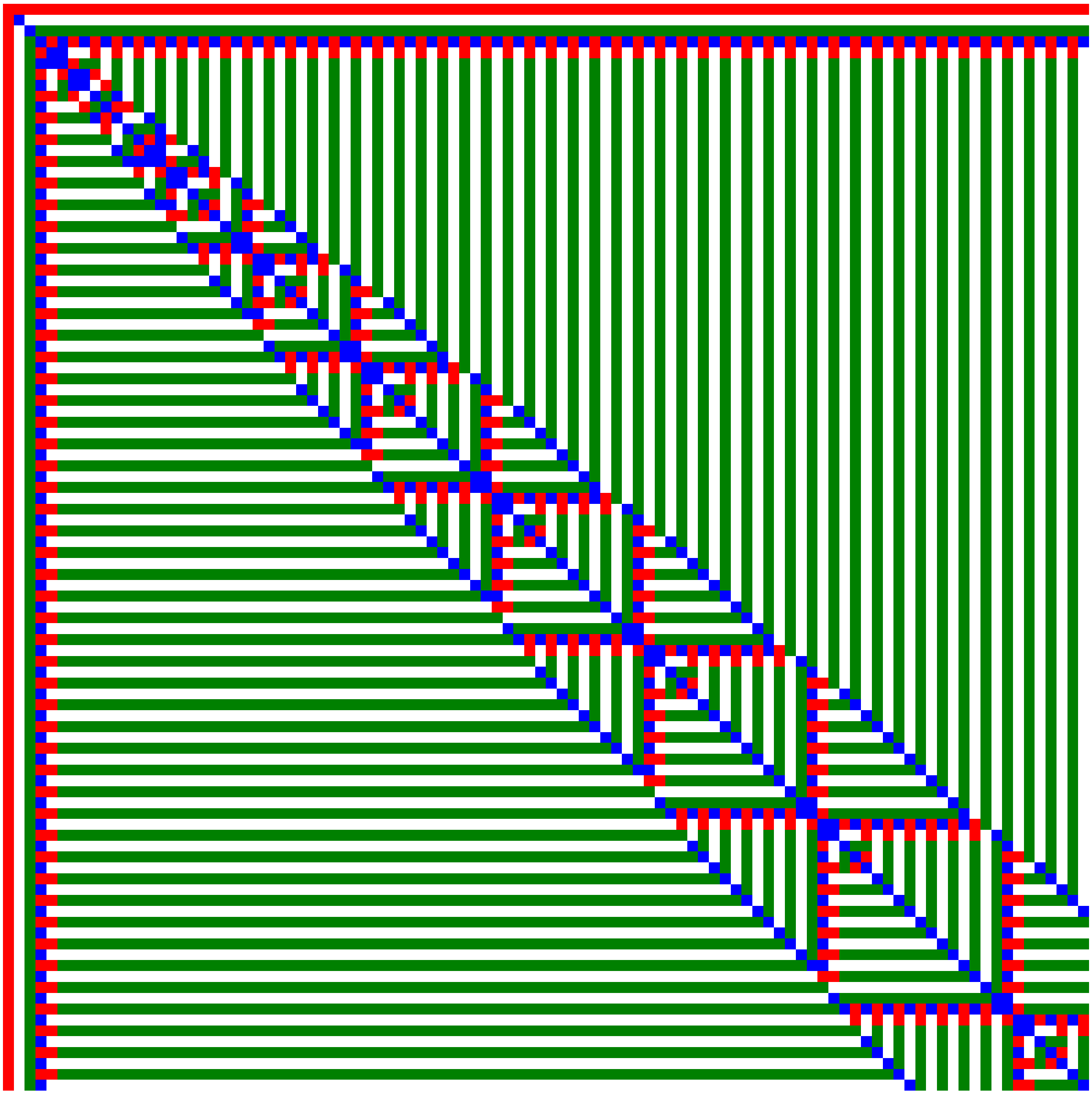
26 Regeln $8 \to 16$

Ist jede rekurrente Doppelfolge ein Substitutionsmuster?

NEIN!

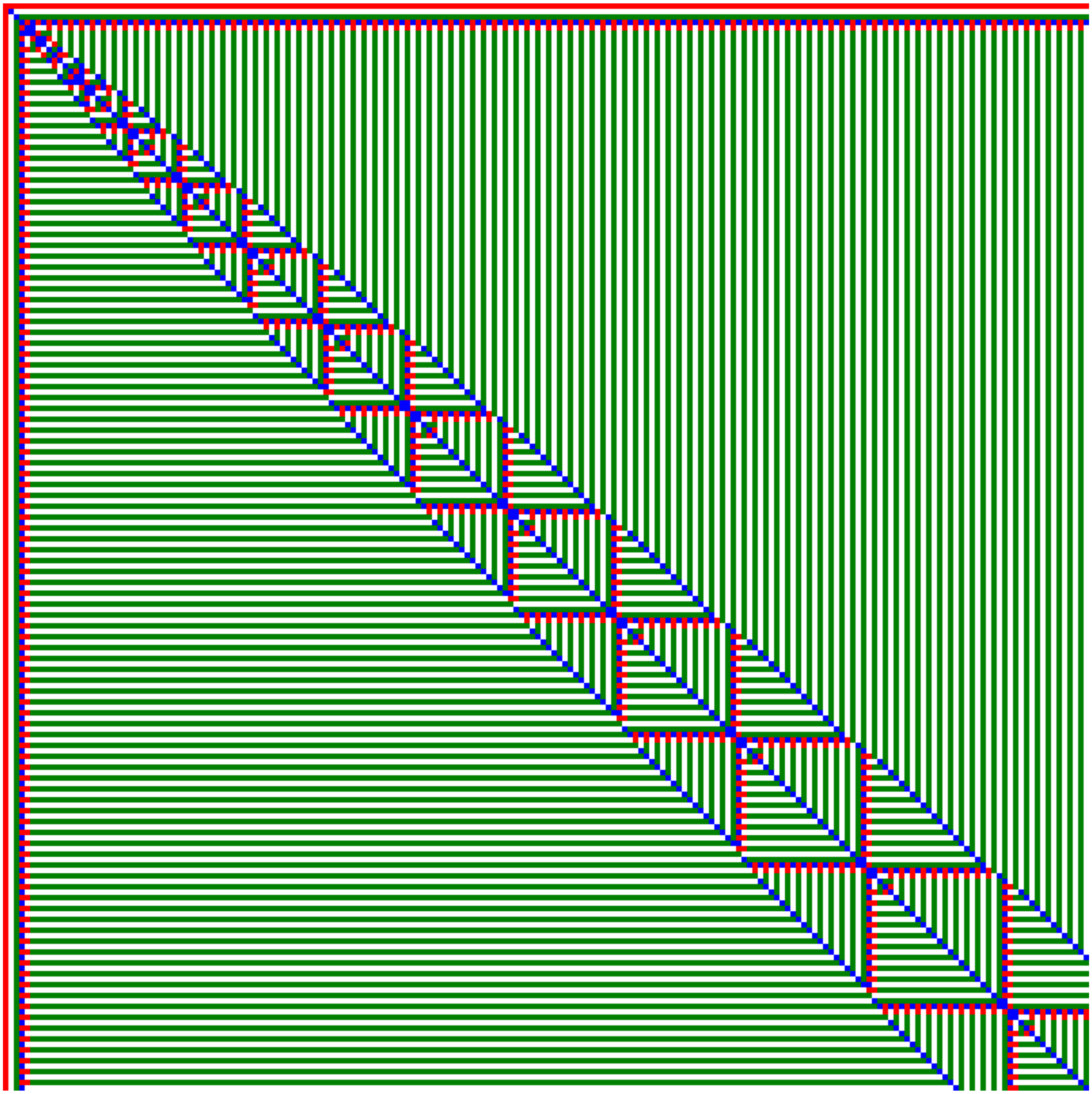
Die Gegenbeispiele interpretieren die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen.

Stairway to Heaven, 100×100



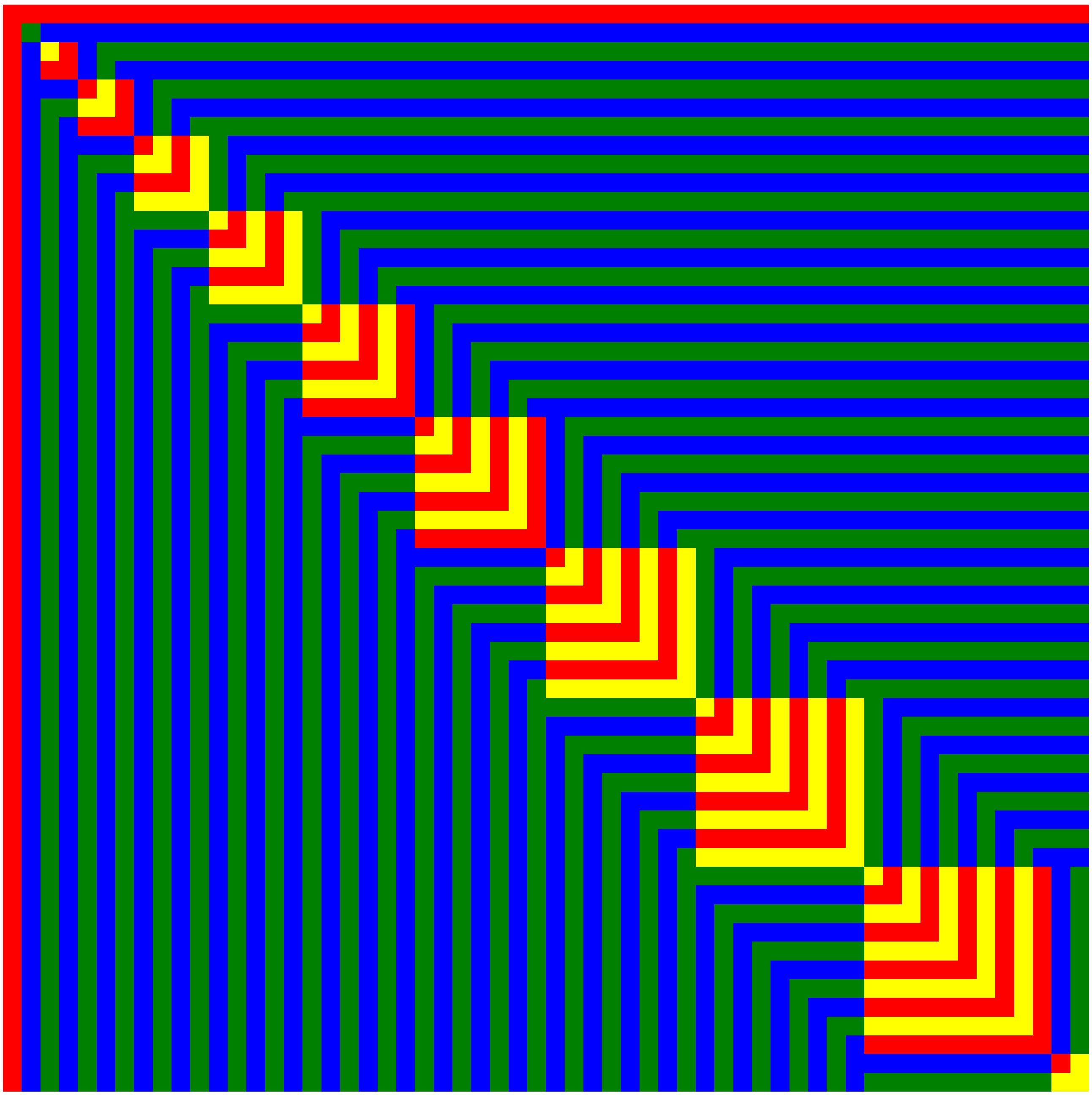
$$(\mathbb{F}_5, 4x^2y^4z^2 + 4x^4y^3 + 4y^3z^4 + 4y^2 + 2, 1)$$

Stairway to Heaven, 200×200



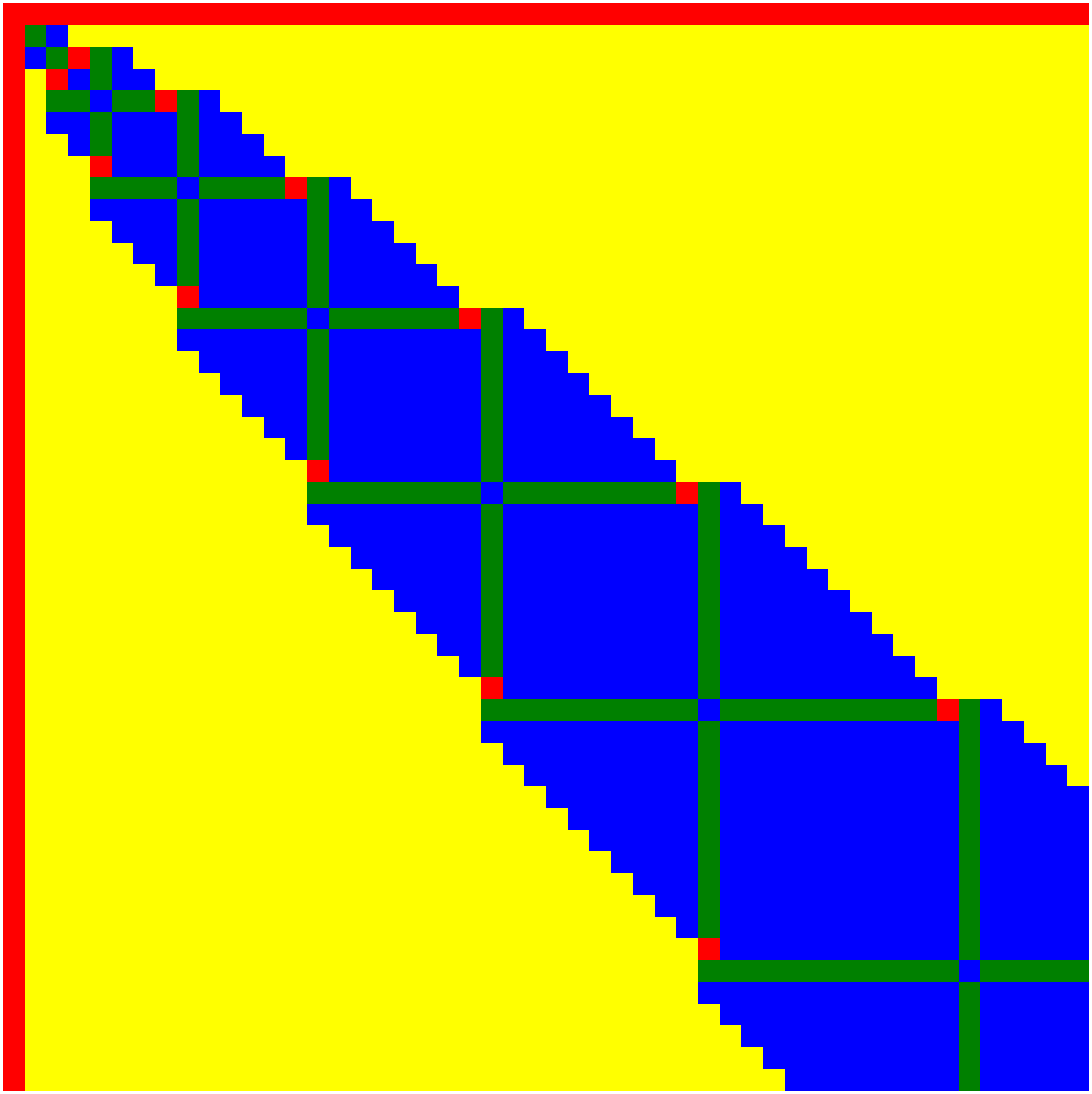
$$(\mathbb{F}_5, 4x^2y^4z^2 + 4x^4y^3 + 4y^3z^4 + 4y^2 + 2, 1)$$

Second Stairway, 58×58



$$(\mathbb{F}_5, 2x^3y^3z^3 + 2xy^2 + 2y^2z + y, 1)$$

Third Stairway, 50×50

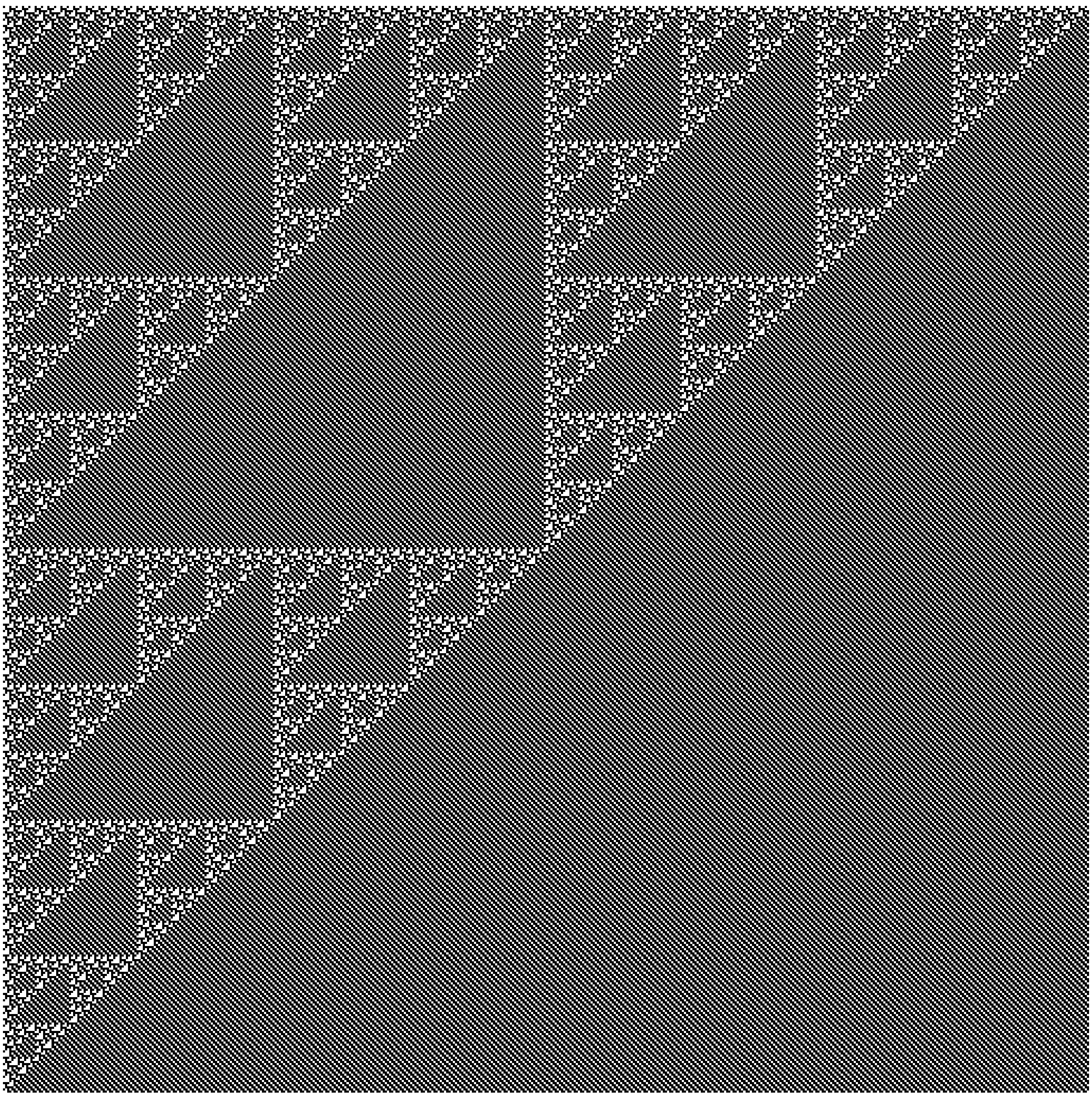


$(\mathbb{F}_5, 4x^3yz^3 + 4x^4y^2 + 4y^2z^4 + x^2y^2z^2 + 4, 1)$

Randwerte als Eingabe

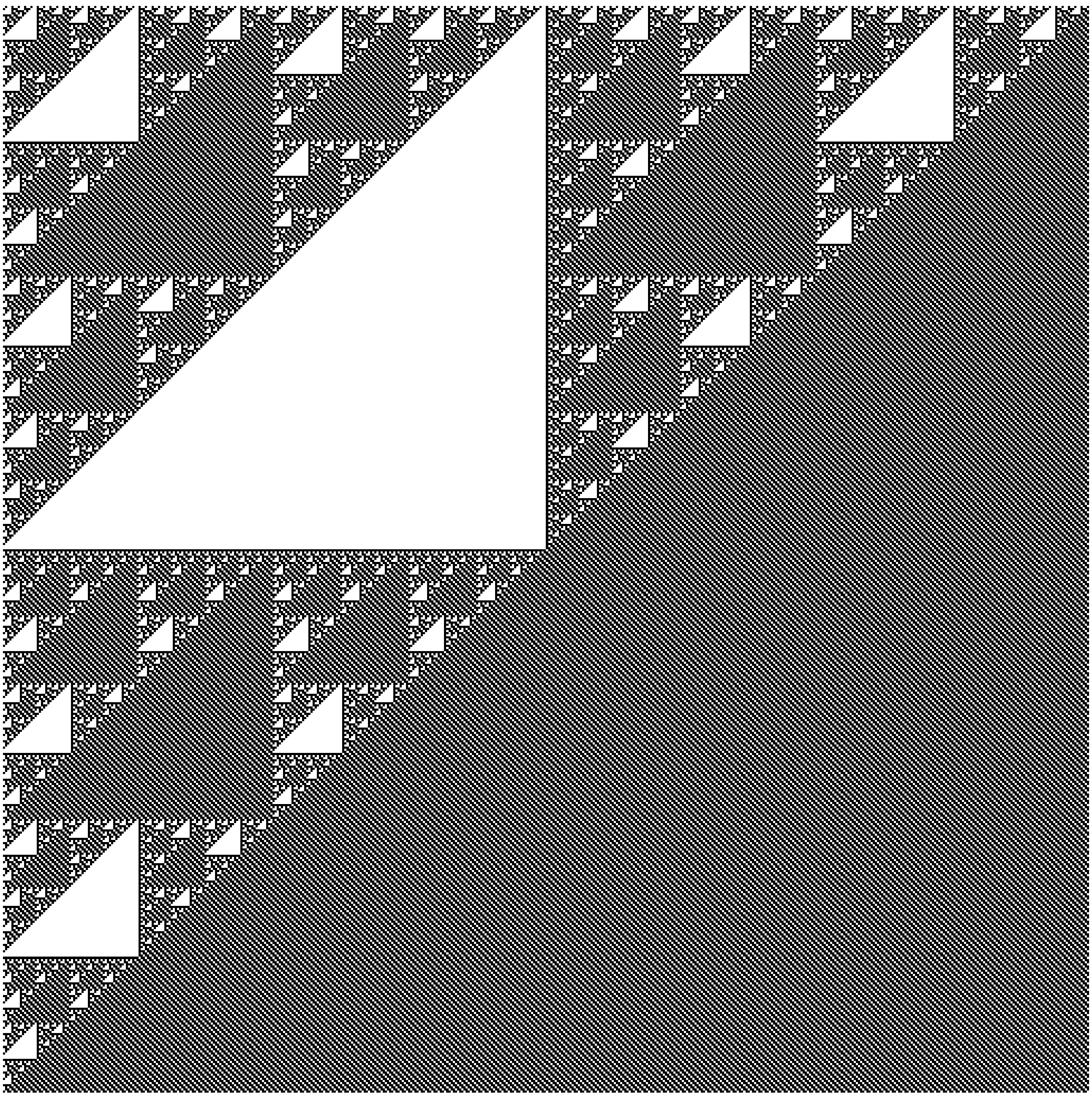
Periodische Randwerte

$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, x+z, '100')$, 512×512



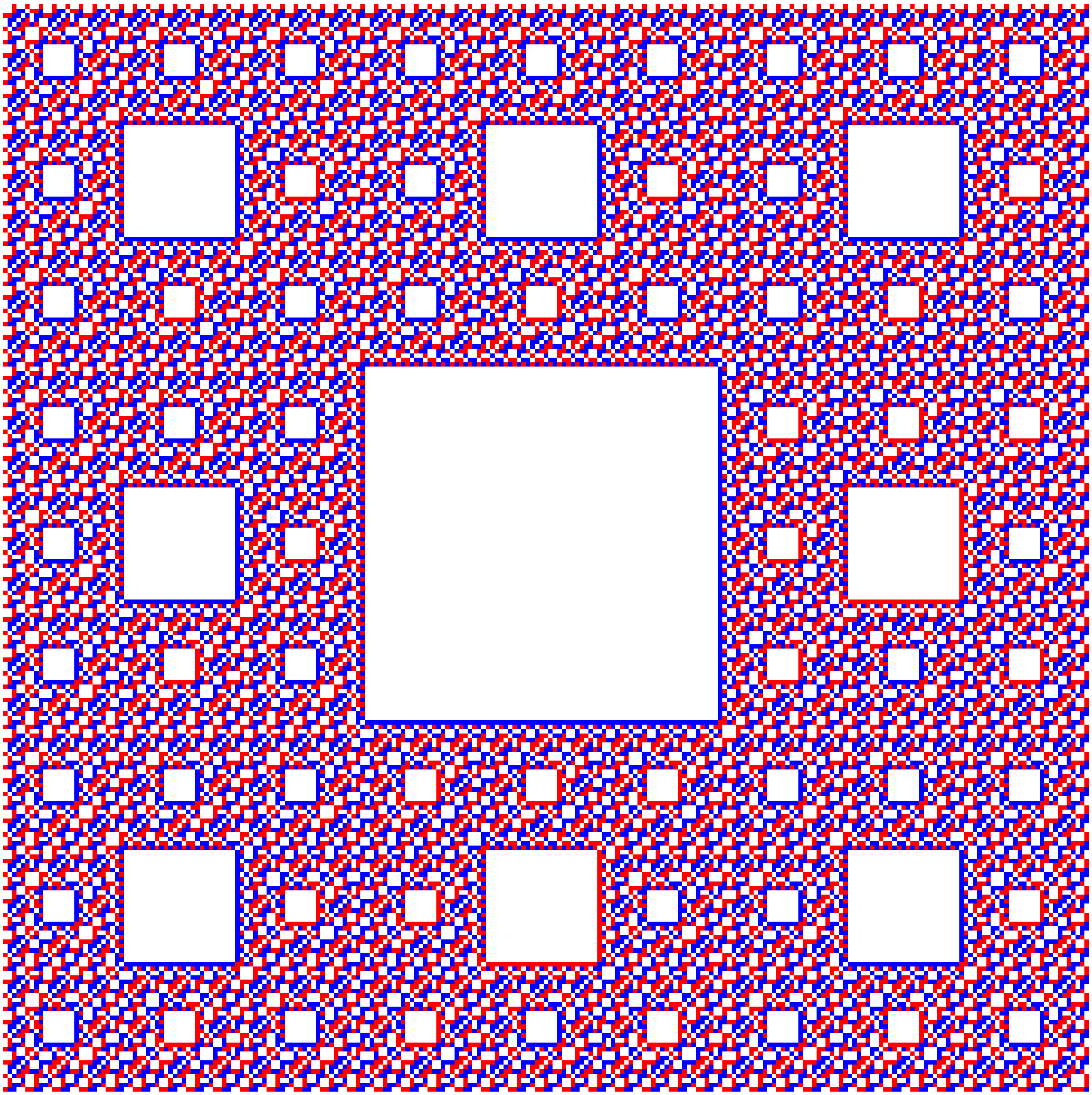
22 Regeln $3 \to 6$

$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, x+z, '010'),\ 512 \times 512$



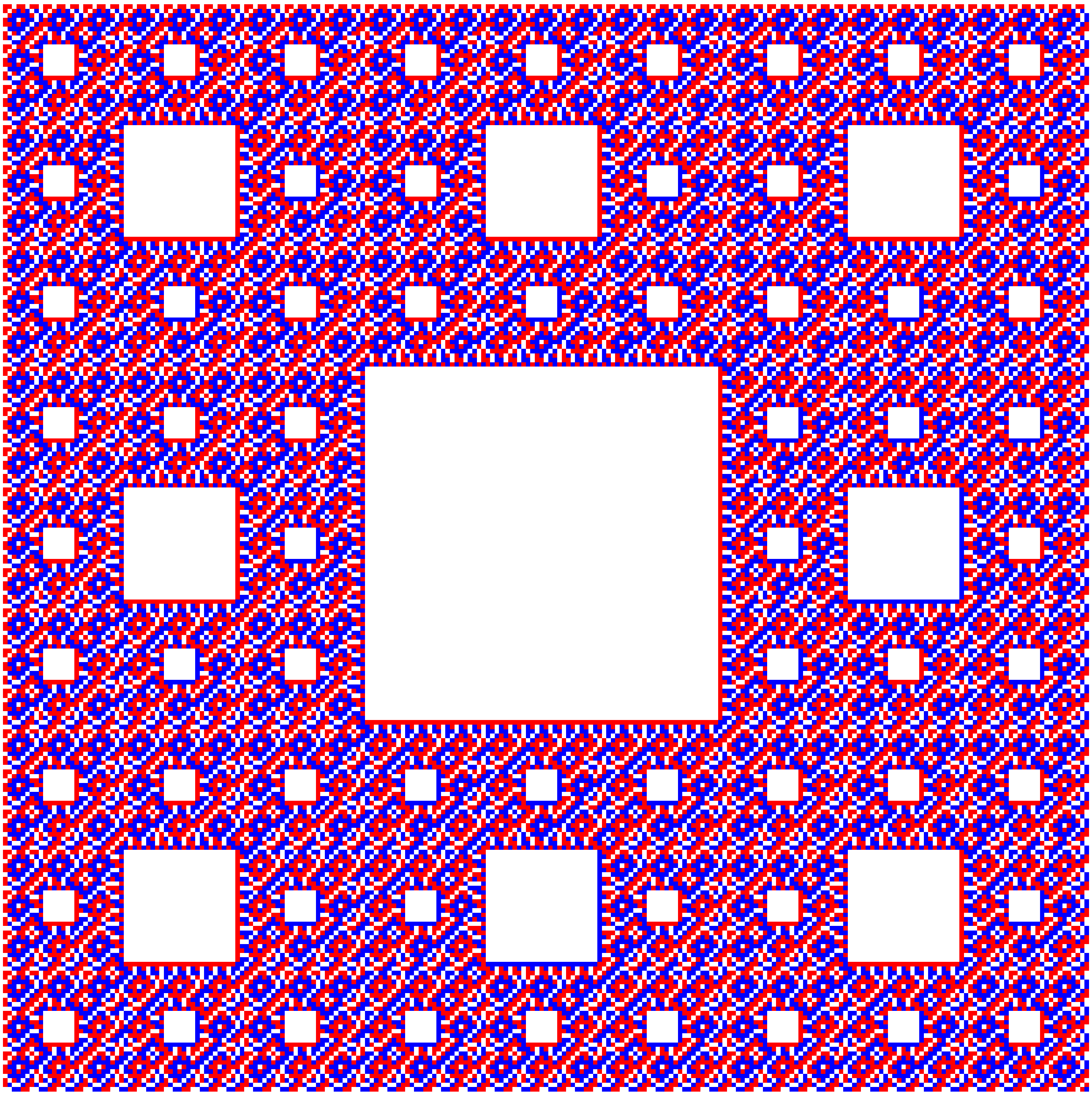
88 Regeln $12 \rightarrow 24$

$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, x+y+z, '001'),\ 243 \times 243$



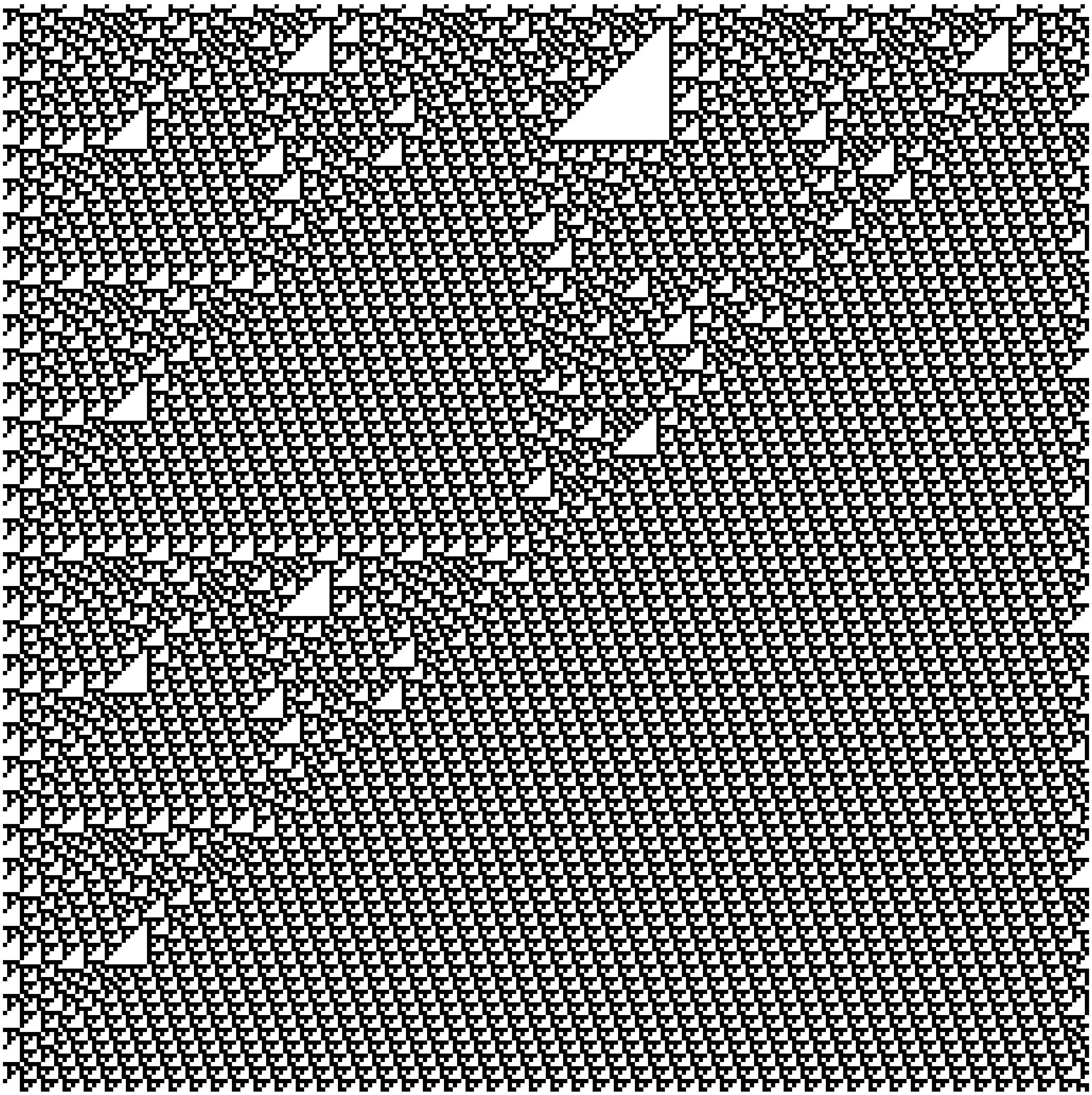
23 Regeln $3 \to 9$

$(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, x+y+z, '110'),\ 243 \times 243$



23 Regeln $3 \to 9$

$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, x+z, '00001', '0100')$, 512×512



64 Regeln $4 \to 8$

Randwerte als Eingabe

Lineare Substitution

Die Thue - Morse Folge

$(\{0,1\},\{0 \to 01, 1 \to 10\}, 0)$

$0110100110010110100101100110100 1\ldots$

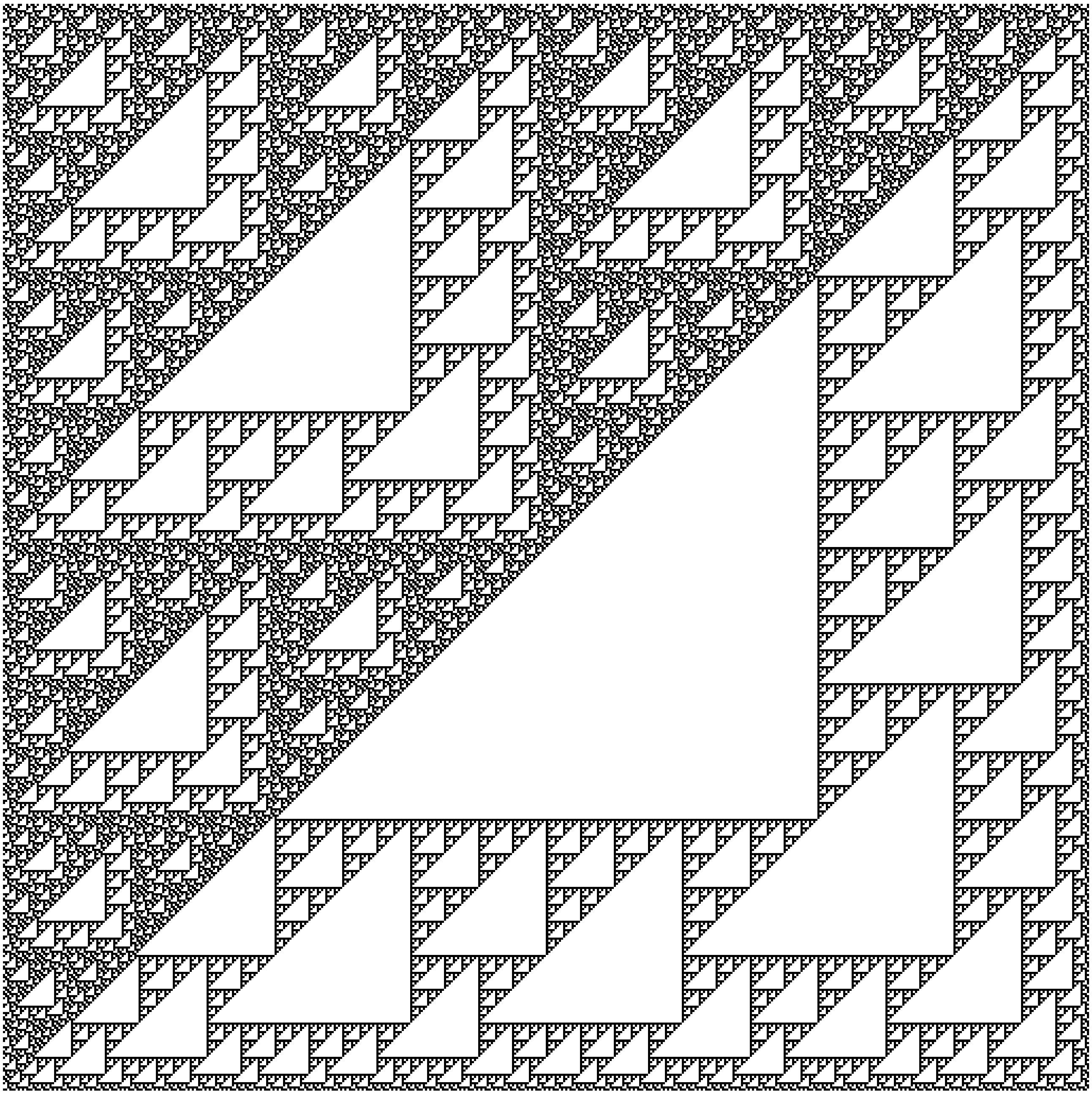
$t_n = s_2(n) \mod 2$

$[s_2(n) := \#\{i \,|\, a_i = 1, n = a_k 2^k + \cdots + a_0\}]$

$$\prod_{i=0}^{\infty}(1 - x^{2^i}) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^{t_j} x^j$$

. . . .

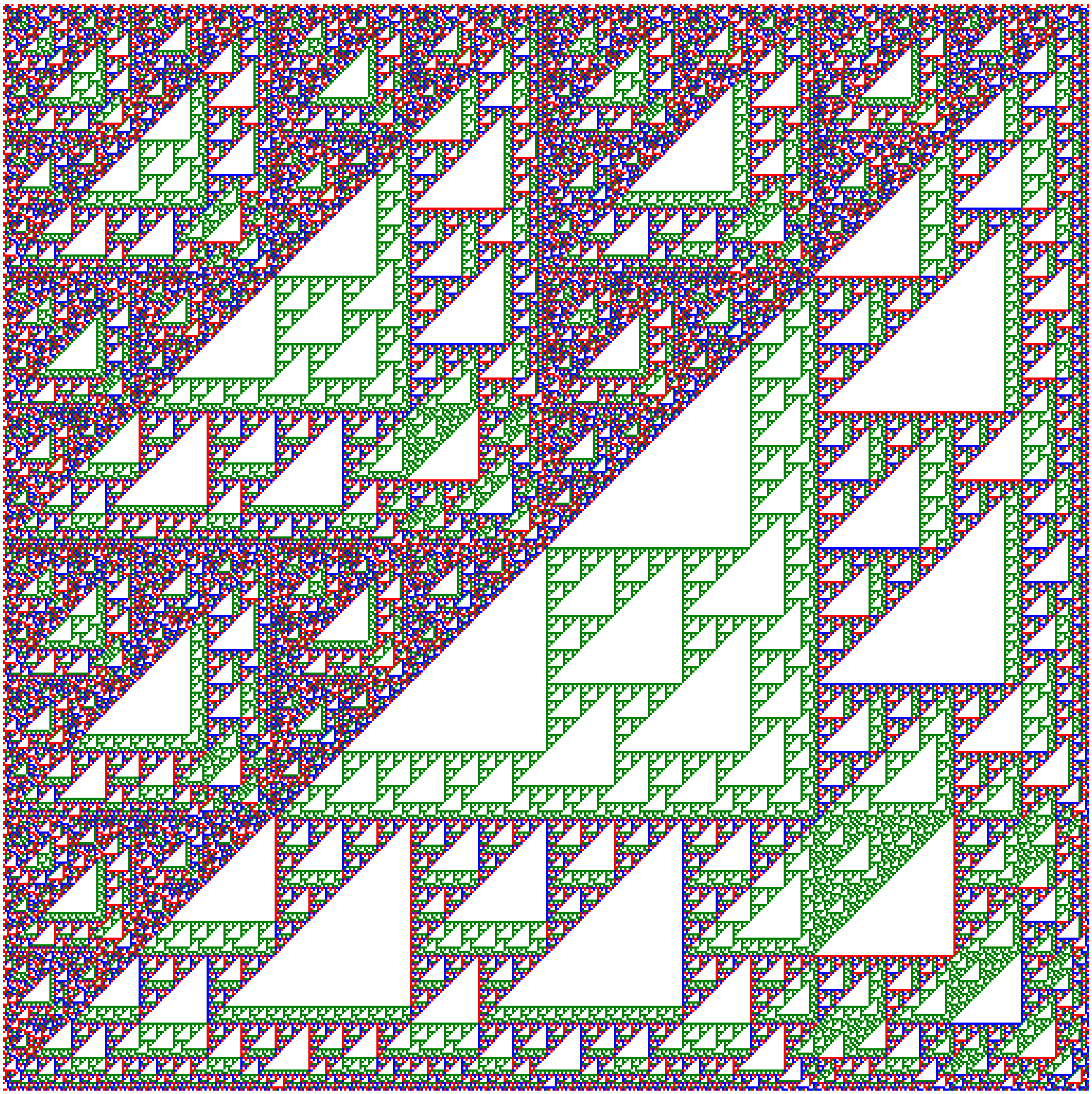
Pascal - Thue - Morse mod 2, 512×512



$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, x+z,$ Thue – Morse$)$

15 Regeln $4 \to 8$

Pascal - Thue - Morse   mod 4, 512×512



$(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, x + z,$ Thue − Morse$)$

284 Regeln $8 \to 16$