Universität Freiburg
Fakultät für Mathematik und Physik
Prof. Dr. Enrique Casanovas
Dr. Gabriel Salazar

Lineare Algebra II
SS 2014

Wiederholungsübung zu Lineare Algebra I

Abgabe bis 8.05.2014 18:00 Uhr

Aufgabe 1: Die Fibonacci Zahlen F_n sind für $n \in \mathbb{N}$ definiert durch

$$F_n := \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 0; \\ 1, & \text{falls } n = 1; \\ F_{n-2} + F_{n-1}, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für alle $n \geq 1$ gilt:

$$F_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}.$$

$\boxed{2}$

Aufgabe 2: Lösen Sie das folgende Gleichungssystem in $\mathbb{Z}_5$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4x_1 & - & 3x_2 & & & = & 3 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & & & + & 2x_3 & = & 4 \end{array}$$

$\boxed{2}$

Aufgabe 3: Prüfen Sie, ob die folgende Relation eine Äquivalenzrelation ist: Für $x, y \in \mathbb{R}$,

$$xRy \quad :\Longleftrightarrow \quad |x - y| < 1.$$

$\boxed{2}$

Aufgabe 4: Sei $(G, *)$ eine Gruppe und H eine Teilmenge von G. Man beweise, dass der *Zentralisator von H*

$$Z_G(H) := \{\, g \in G \mid g * h = h * g \text{ für alle } h \in H \,\}$$

und der *Normalisator von H*

$$N_G(H) := \{\, g \in G \mid gH = Hg \,\}$$

Untergruppen von G sind. $\boxed{2}$

Aufgabe 5: Sei $V = \mathbb{Q}^2$ mit der üblichen Vektoren-Addition und $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Für $a + \sqrt{2}\, b \in K$ und $(c, d) \in V$ wird die folgende Multiplikation definiert:

$$(a + \sqrt{2}\, b)(c, d) := (ac + 2bd, bc + ad).$$

Ist V dann ein K-Vektorraum? $\boxed{2}$

Aufgabe 6: Sei $V = \mathbb{Z}_2^4$ mit der üblichen Vektoren-Addition und $K = \mathbb{Z}_2$. Geben Sie ausdrücklich alle Elemente aus

$$\operatorname{span}(\,(1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1)\,)$$

an. $\boxed{2}$

Aufgabe 7: Für i =1, 2, seien $L_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare Abbildungen, sodass

(a) $L_1(4, 1) = (1, 1)$, $L_1(1, 1) = (3, -2)$.

(b) $L_2(1, 1) = (2, 1)$, $L_2(-1, 1) = (6, 3)$.

Berechnen Sie $L_i(1, 0)$ und $L_i(0, 1)$ für i =1, 2. $\boxed{2}$

Aufgabe 8: Berechnen Sie

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{pmatrix}$$

$\boxed{2}$