Universität Freiburg
Fakultät für Mathematik und Physik
Prof. Dr. Enrique Casanovas
Dr. Gabriel Salazar

Lineare Algebra II
SS 2014

1. Übungsblatt zu Lineare Algebra II

Abgabe bis 15.05.2014 18:00 Uhr

Aufgabe 1: Das *Spektrum* $\operatorname{spec}(\varphi)$ eines Endomorphismus $\varphi \in \operatorname{End}(V)$ ist die Menge aller Eigenwerte von φ. Bestimmen Sie $\operatorname{spec}(\varphi)$ für die folgenden Endomorphismen:

(a) $\varphi \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^2)$ definiert durch $\varphi(a,b) = (b,a)$.

(b) $\varphi \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^2)$ definiert durch $\varphi(a,b) = (-b,a)$.

(c) Sei V der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller glatten (d.h. unendlich oft differenzierbaren) Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\varphi \in \operatorname{End}(V)$ definiert durch $\varphi(f) = f'$ (V ist selbstverständlich von unendlicher Dimension).

1+1+3

Aufgabe 2:

(a) Sei K ein Körper. Für $n \geq 2$, sei $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass diese Matrix das folgende charakteristische Polynom hat:

$$P_A(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

(b) Verwenden Sie dieses Ergebnis, um eine 3×3 - Matrix über $\mathbb{Z}_3$ zu finden, die keine Eigenwerte in $\mathbb{Z}_3$ hat.

2+2

Aufgabe 3: Bestimmen Sie, ob die folgenden Matrizen diagonalisierbar sind. Wenn ja, stellen Sie sie als Diagonalmatrizen dar. Wenn nicht, begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 1 & 1-i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

(b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 6 \\ -1 & 1 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{C})$.

$\boxed{1+2}$

Aufgabe 4: Sei $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{Q})$. Außerdem seien $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ die (nicht unbedingt verschiedenen) Eigenwerte von A, wenn man A als Element aus $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ betrachtet. Zeigen Sie, dass $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ und $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ rationale Zahlen sind. $\boxed{4}$