Universität Freiburg
Fakultät für Mathematik und Physik
Prof. Dr. Enrique Casanovas
Dr. Gabriel Salazar

Lineare Algebra II
SS 2014

3. Übungsblatt zu Lineare Algebra II

Abgabe bis 30.05.2014 18:00 Uhr

Aufgabe 1: Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:
Sind φ und ψ zwei nilpotente Endomorphismen, dann ist $\varphi + \psi$ auch nilpotent.

$\boxed{3}$

Aufgabe 2: Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und α, $\beta \in \mathrm{End}(V)$, sodass $\alpha\beta = \beta\alpha$. Sei λ ein Eigenwert von α und V'_λ der Hauptraum von λ. Man zeige, dass V'_λ invariant unter β ist.

$\boxed{2}$

Aufgabe 3: Sei K ein Körper, $n \geq 3$ und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(K).$$

(a) Man zeige, $A(A^2 - nA + (2n-4)I) = 0$.

(b) Sei $\mathrm{Char}(K)$ die Charakteristik des Körpers K. Bestimmen Sie das minimale Polynom m_A in den folgenden Fällen:

(i) $\mathrm{Char}(K) = 2$.

(ii) $\mathrm{Char}(K) \neq 2$ und $\mathrm{Char}(K) \nmid n-2$.

(iii) $\mathrm{Char}(K) \neq 2$ und $\mathrm{Char}(K) \mid n-2$.

$\boxed{2+3}$

Aufgabe 4: Sei K ein Körper mit $\mathrm{Char}(K) = 0$. Ferner sei $B \in \mathcal{M}_{n\times n}(K)$ und

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ B & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n\times 2n}(K).$$

Dabei seien $m_A = \prod_j p_j^{a_j}$ und $m_B = \prod_j p_j^{b_j}$ die Minimalpolynome von A bzw. B. Zeigen Sie

$$a_i = \begin{cases} b_i + 1, & \text{für } p_i \neq x; \\ b_i, & \text{für } p_i = x. \end{cases}$$

(Hinweis: Man benutze

$$g(A) = \begin{pmatrix} g(B) & 0 \\ Bg'(B) & g(B) \end{pmatrix}$$

für $g \in K[X]$.) $\boxed{6}$