Universität Freiburg
Fakultät für Mathematik und Physik
Prof. Dr. Enrique Casanovas
Dr. Gabriel Salazar

Lineare Algebra II
SS 2014

4. Übungsblatt zu Lineare Algebra II

Abgabe bis 05.06.2014 18:00 Uhr

Aufgabe 1: Berechnen Sie eine Jordan-Normalform $J \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$ der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & -1 & 0 & 3 \\ -8 & -2 & 2 & 1 & -2 \\ -6 & -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R}).$$

(Hinweis: 1 ist 3-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A.) Geben Sie die zugehörige Transformationsmatrix $Q \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$ mit $J = Q^{-1}AQ$ an. $\boxed{3}$

Aufgabe 2: Lösen Sie das System

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 5x_n - 3y_n - 5z_n + 5w_n \\ y_{n+1} &= x_n + y_n - z_n + w_n \\ z_{n+1} &= 2x_n - 2y_n - 2z_n + 3w_n \\ w_{n+1} &= x_n - y_n - 2z_n + 3w_n \end{aligned}$$

wobei $x_0 = y_0 = z_0 = w_0 = 1$. (Hinweis: Kaye & Wilsons Buch, Seite 213.) $\boxed{4}$

Aufgabe 3: Seien a und b reelle Zahlen mit $a < b$ und $t_1, \dots, t_n \in [a, b]$ paarweise verschieden. Sei

$$V := \{ p \in \mathbb{R}[x] \mid 0 \leq \operatorname{Grad} p < n \}.$$

Für jedes $1 \leq i \leq n$ sei $\delta_i \in V^*$ definiert durch $\delta_i(p) = p(t_i)$. Zeigen Sie, dass $\{ \delta_1, \dots, \delta_n \}$ eine Basis von V^* ist.

$\boxed{4}$

Aufgabe 4: Sei

$$V := \{ p \in \mathbb{R}[x] \mid 0 \leq \operatorname{Grad} p \leq 4 \},$$

$a_1, \dots, a_5$ paarweise verschiedene positive reelle Zahlen und für jedes $1 \leq i \leq 5$ sei $\delta_i \in V^*$ definiert durch $\delta_i(p) = \int_0^{a_i} p(t)dt$. Zeigen Sie, dass $\{ \delta_1, \dots, \delta_5 \}$ eine Basis von V^* ist.

(Hinweis: Vandermonde Matrizen sind regulär.) $\boxed{5}$