Universität Freiburg
Fakultät für Mathematik und Physik
Prof. Dr. Enrique Casanovas
Dr. Gabriel Salazar

Lineare Algebra II
SS 2014

5. Übungsblatt zu Lineare Algebra II

Abgabe bis 19.06.2014 18:00 Uhr

Aufgabe 1: Seien V und W Vektorräume (nicht notwendig endlichdimensional) und $f \in \mathrm{L}(V, W)$. Zeigen Sie, dass f^{**} eine Fortsetzung von f ist, d.h., das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V^{**} & \xrightarrow{f^{**}} & W^{**} \\ \Phi \Big\uparrow & & \Big\uparrow \Phi \\ V & \xrightarrow{f} & W \end{array}$$

kommutiert. $\boxed{3}$

Aufgabe 2: Bestimmen Sie für $\mathbb{R}^3$ zu folgender Basis die duale Basis:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

d.h., geben Sie die Koordinaten der dualen Basis bzgl. der zur Standardbasis dualen Basis an. $\boxed{4}$

Aufgabe 3: Sei $S = \{ a_0, \ldots, a_n \} \subset \mathbb{R}$ eine endliche Menge reeller Zahlen. Seien $V := \mathbb{R}^S$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Abbildungen $w : S \to \mathbb{R}$,

$$P := \{ p \in \mathbb{R}[x] \, : \, 0 \leq \operatorname{Grad} p \leq n \} \, ,$$

und

$$(w, p) := \sum_{0 \leq i \leq n} w(a_i) p(a_i).$$

Zeigen Sie, dass $V, P, (\cdot \, , \cdot)$ ein duales Paar bildet. $\boxed{4}$

Aufgabe 4: Es sei $(\ ,\ ) : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ die Minkowski-Bilinearform, definiert gemäß

$$(\xi, \eta) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3 - \xi_4\eta_4$$

für alle $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$, $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4) \in \mathbb{R}^4$. Weiterhin sei der Endomorphismus f gegeben durch die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den zu f adjungierten Endomorphismus f^t. $\boxed{5}$