

6. Übungsblatt zu Lineare Algebra II

Abgabe bis 26.06.2014 18:00 Uhr

Aufgabe 1: Seien $x = (x_1, x_2)$ und $y = (y_1, y_2)$. Bestimmen Sie, welche der folgenden Ausdrücke Bilinearformen auf \mathbb{R}^2 definieren.

- (a) $f(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2$
- (b) $f(x, y) = x_1x_2 - y_1y_2$
- (c) $f(x, y) = x_1 + y_1$
- (d) $f(x, y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 4x_2y_2$

4

Aufgabe 2:

(a) Sei $(,) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ die Bilinearform definiert durch

$$\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix} \right) = aa' + 2bc' + cc' + 2cb' - ab' + bb' - ba'.$$

Finden Sie die Matrix (bezüglich der Standardbasis), die diese Bilinearform darstellt.

(b) Sei $(,) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ die Bilinearform definiert durch

$$(v, w) = v^T \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} w.$$

Finden Sie die Matrix, die diese Bilinearform darstellt, bezüglich der Basis

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

4

Aufgabe 3:

(a) Finden Sie eine Bilinearform $(,) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, die die quadratische Form

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \mapsto a^2 - 2ab + 4ac - 2bc + 2c^2$$

definiert.

(b) Sei $(,) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ die durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

definierte symmetrische Bilinearform. Finden Sie die durch $(,)$ definierte quadratische Form.

4

Aufgabe 4: Bestimmen Sie für die symmetrischen Bilinearformen auf \mathbb{Q}^3 bzw. \mathbb{Q}^4 , die bezüglich der Standardbasis durch die folgenden Matrizen gegeben sind, Orthogonalbasen und Diagonalisierungen. Das heißt, ermitteln Sie jeweils eine Basis, sodass die entsprechende Matrix Diagonalgestalt hat, und geben Sie diese an.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

4