

9. Übungsblatt zu Lineare Algebra II

Abgabe bis 17.07.2014 18:00 Uhr

Aufgabe 1: Seien $n \geq 1$, $1 \leq k \leq n$, V ein reeller Vektorraum der Dimension n , $D : V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine von der Nullform verschiedene, alternierende k -Form auf V und $\varphi \in L(V, V)$. Wir definieren jetzt zusätzlich eine Abbildung $\bar{D} : V \times \cdots \times V \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\bar{D}(c_1, \dots, c_k) := \sum_{j=1}^k D(c_1, \dots, c_{j-1}, \varphi(c_j), c_{j+1}, \dots, c_k)$$

$(c_1, \dots, c_k \in V)$.

- (a) Zeigen Sie, dass \bar{D} eine alternierende k -Form auf V ist.
- (b) Ist $k = n$, so ist \bar{D} eine alternierende n -Form auf V (Determinantenform) und es gibt eine (nur von φ abhängende) Konstante $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $\bar{D} = \gamma \cdot D$. Zeigen Sie, dass der Faktor γ gleich $\text{Spur}(\varphi)$ ist.

5

Aufgabe 2: Sei V ein n -dimensionaler Euklidischer Raum, sei $U \preceq V$ von der Dimension $n - 1$. $[\cdot, \cdot]$ sei eine symmetrische Bilinearform auf V . Nach dem Satz über die Hauptachsentransformation lässt sich $[\cdot, \cdot]$ (bzw. $[\cdot, \cdot] \upharpoonright U \times U$, die Einschränkung von $[\cdot, \cdot]$ auf $U \times U$) bez. einer geeigneten ON-Basis von V (bzw. von U) durch eine Diagonalmatrix darstellen. $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ (bzw. $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_{n-1}$) seien die Elemente auf der Diagonalen dieser Matrix. Zeigen Sie, dass

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n.$$

Hinweis: Verwenden Sie Satz 7.4.6.

5

Aufgabe 3: Wir betrachten den \mathbb{R}^3 mit dem Standardskalarprodukt. Eine Drehung ist eine orthogonale Abbildung mit Determinante 1. Diese Aufgabe zeigt unter anderem, dass jede solche Drehung eine Verkettung von (speziellen) Drehungen um die Koordinatenachsen ist. (Dabei genügen sogar zwei Achsen.)

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$T_1(\alpha) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (\text{Drehung um die } x\text{-Achse}),$$

$$T_3(\alpha) := \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{Drehung um die } z\text{-Achse}).$$

(a) Zeigen Sie, dass jede Drehung T die Form

$$T_3(\alpha_1) \circ T_1(\alpha_2) \circ T_3(\alpha_3)$$

hat. (Man nennt α_1 , α_2 und α_3 die Eulerschen Winkel von T .) Gehen Sie dabei wie folgt vor:

1. Wählen Sie α_1 so, dass $T_3(-\alpha_1) \circ T =: T'$ die Form

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

hat. (Warum geht das?)

2. Wählen Sie α_2 mit $T_1(-\alpha_2) \circ T' =: T''$ von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & 1 \end{pmatrix}.$$

(Warum geht das?)

3. Folgern Sie, dass T'' dann die Gestalt

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat, und schließen Sie nun, dass es α_3 gibt, sodass $T'' = T_3(\alpha_3)$.

(b) Rechnen Sie die Matrix $T_3(\alpha_1) \circ T_1(\alpha_2) \circ T_3(\alpha_3)$ aus. Überprüfen Sie rechnerisch, dass dies in der Tat eine orthogonale Matrix ist.