Universität Basel
Departement Mathematik und Informatik
Dr. Armin Schikorra
Dominik Himmelsbach

Übungen zur
Funktionalanalysis
Serie 10 vom 29.04.2015

Für eine kontinuierliche Verbesserung der Vorlesung haben Sie hier die Möglichkeit einer Meinungsabgabe

	1	2	3	4	5
Diese Übung ist zu leicht (1), zu schwierig (5)	☐	☐	☐	☐	☐
Diese Übung ist langweilig (1), interessant (5)	☐	☐	☐	☐	☐
Die letzte Vorlesung war unverständlich (1), verständlich (5)	☐	☐	☐	☐	☐
Die letzte Vorlesung war langweilig (1), interessant (5)	☐	☐	☐	☐	☐

Kommentare zur Verbesserung:

Aufgabe 35

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge, und sei $C_0^1(\Omega)$ der Raum aller $C^1(\mathbb{R}^n)$-Abbildungen mit $u \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$. Gegeben sei für ein festes $f \in C_0^1(\Omega)$ das Variationsfunktional

$$E(u) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx + \int_\Omega f(x)\, u(x)\, dx.$$

wobei $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n)^T$ der Gradient ist.
Zeigen Sie: Falls $u \in C_0^1(\Omega) \cap C^2(\overline{\Omega})$ und u ist ein Minimierer von E in $C_0^1(\Omega)$, d.h. falls

$$E(u) \leq E(v) \quad \text{für alle } v \in C_0^1(\Omega),$$

dann gilt

$$\Delta u = f \quad \text{in } \Omega. \tag{1}$$

Dabei ist $\Delta u = \sum_{i=1}^n \partial_i \partial_i u$ der Laplace-Operator. Sie können wie folgt vorgehen:

(i) (Variation:) Es gilt für alle $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ und alle $t \in \mathbb{R}$, $E(u) \leq E(u + t\varphi)$

(ii) Nehmen Sie die Ableitung in t um zu zeigen, dass die "schwache Formulierung von (1)" gilt:

$$\forall \varphi \in C_0^1(\Omega): \quad -\sum_{i=1}^n \int_\Omega \partial_i u \, \partial_i \varphi = \int_\Omega f \, \varphi$$

(iii) Schließen Sie mit partieller Integration:

$$\int_\Omega (\Delta u - f)\, \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^1(\Omega)$$

(iv) Wählen Sie ein geeignetes φ, um $\|\Delta u - f\|_{L^2} = 0$ und somit (1) zu erhalten.

Aufgabe 36 (*Sobolev-Raum*) Wir bezeichnen mit ∂_1 den Ableitungsoperator, d.h. $\partial_1 f(x) = f'(x)$. Sei $X := L^2((0,1))$ mit der üblichen L^2-Norm, und $D(\partial_1) := C^1([0,1]) \subset X$. Dann können wir ∂_1 als (nicht-stetigen) Operator $\partial_1 : D(\partial_1) \to X$ auffassen.

(i) Zeigen Sie: ∂_1 ist ein abschließbarer Operator (vgl. Beispiel 4.22).

Den Abschluss von ∂_1 bezeichnen wir mit $\overline{\partial_1}$, und den neuen Definitionsbereich von $\overline{\partial_1}$, versehen mit der Norm $\|\cdot\|_{H^1((0,1))}$ nennen wir den *Sobolev-Raum* $H^1((0,1)) := (D(\overline{\partial_1}), \|\cdot\|_{H^1((0,1))})$, wobei

$$\|f\|_{H^1((0,1))} := \sqrt{\|f\|^2_{L^2((0,1))} + \|\overline{\partial_1} f\|^2_{L^2((0,1))}} \quad \text{für } f \in H^1((0,1)).$$

(ii) Zeigen Sie dazu allgemein: Ist X ein Banachraum und $A : D(A) \to X$ ein abschliessbarer Operator mit Abschluss $\overline{A} : D(\overline{A}) \to X$. Definiere $Y := (D(\overline{A}), \|\cdot\|_Y)$ mit der Norm

$$\|x\|_Y := \|x\|_X + \|\bar{A}x\|_X \quad \forall x \in Y.$$

Zeigen Sie: Dann ist Y vollständig.

Hinweis: Nehmen Sie eine Cauchy-Folge bezüglich Y und benutzen Sie die Abgeschlossenheit von $\overline{A}$.

(iii) Schließen Sie: $H^1((0,1))$ ist bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{H^1((0,1))}$ vollständig.

(iv) Zeigen Sie, $H^1((0,1))$ ist bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{H^1((0,1))}$ ein Hilbertraum.

Hinweis: Parallelogramm-Identität

(v)* Überlegen Sie sich eine ähnliche Konstruktion für die n-dimensionale Situation, d.h. definieren Sie den Sobolev-Raum $H^1(\Omega)$ für offene Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Falls Sie als Ausgangs-Definitionsbereich statt $C^1(\overline{\Omega})$ den Raum

$$C^1_0(\Omega) = \{f \in C^1(\mathbb{R}^n) : \quad f \equiv 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n \backslash \Omega\}$$

nehmen, erhalten Sie den Raum $H^1_0(\Omega)$ - den Sobolev-Raum mit schwachen 0-Randwerten.

---

*Aufgabe 37 Zeigen Sie (einen Spezialfall der) Poincaré-Ungleichung:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge. Dann gibt es eine Konstante $C = C(\Omega) > 0$, so dass für jedes $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ mit $u \equiv 0$ auf dem $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$,

$$\left(\int_\Omega |u(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Dabei ist $\nabla = (\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n)^T$ der Gradient.

Sie können dazu wie folgt vorgehen: Sei u wie oben gegeben.

(i) Zeigen Sie: Für $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|u(x) - u(y)| \leq |x - y| \left(\int_{t=0}^1 |\nabla u(x + t(y - x))|^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

Hinweis: Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auf $f(t) := u(x + t(y - x))$, und Hölder-Ungleichung.

(ii) Zeigen Sie: Es gibt ein $v \in \mathbb{R}^n$, so dass für alle $x \in \Omega$ gilt: $x + v \notin \Omega$.

(iii) Wählen Sie in der Ungleichung in (i) $y := x + v$ und schließen Sie, dass für alle $x \in \Omega$

$$|u(x)| \leq |v| \left(\int_{t=0}^1 |\nabla u(x + tv)|^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(iv) Integrieren Sie die obige Ungleichung, und substituieren Sie, um das Ergebnis zu erhalten.

Zeigen Sie, dass die Ungleichung auch für $u \in H^1_0(\Omega)$ gilt (siehe Aufgabe 36(v)).