Universität Basel
Departement Mathematik und Informatik
Dr. Armin Schikorra
Dominik Himmelsbach

Übungen zur Funktionalanalysis Serie 11 vom 06.05.2015

Für eine kontinuierliche Verbesserung der Vorlesung haben Sie hier die Möglichkeit einer Meinungsabgabe

	1	2	3	4	5
Diese Übung ist zu leicht (1), zu schwierig (5)	□	□	□	□	□
Diese Übung ist langweilig (1), interessant (5)	□	□	□	□	□
Die letzte Vorlesung war unverständlich (1), verständlich (5)	□	□	□	□	□
Die letzte Vorlesung war langweilig (1), interessant (5)	□	□	□	□	□

Kommentare zur Verbesserung:

Das *komplexe* Skalarprodukt eines $\mathbb{C}$-Prä-Hilbertraumes H, $\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \to \mathbb{C}$, erfüllt folgende Eigenschaften:

- $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$ und $\langle x, x\rangle \geq 0$
- $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, dabei ist $\overline{a + ib} = a - ib$ für $a, b \in \mathbb{R}$
- $\langle \lambda x + \mu y, z\rangle = \lambda\langle x, z\rangle + \mu\langle y, z\rangle$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

Aufgabe 38 Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $A \in L(H)$. Für ein gegebenes $y \in H$ betrachten wir die Abbildung $T_y : H \to \mathbb{C}$

$$T_y : x \mapsto \langle Ax, y\rangle.$$

Zeigen Sie:

(i) $T_y \in H^*$.

(ii) Es existiert genau ein $z = z(y) \in H$ mit

$$T_y x = \langle x, z\rangle \quad \forall x \in H.$$

Hinweis: Riesz'scher Darstellungssatz (ohne Beweis gilt dieser auch auf komplexen Vektorräumen).

(iii) Dieses $z(y)$ definieren wir als $A^*y \in H$. Zeigen Sie, dass A^* linear ist.

(iv) Es gilt

$$\|A\|_{L(H)} = \|A^*\|_{L(H)}.$$

Überlegen Sie sich dazu, dass auf jedem Hilbertraum für jeden Operator $B \in L(H)$ gilt

$$\|B\|_{L(H)} = \sup_{\|x\|_H, \|y\|_H \leq 1} |\langle Bx, y\rangle|.$$

(v) $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle$ für alle $x, y \in H$. Für jedes $B \in L(H)$ mit $\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle$ für alle $x, y \in H$ gilt $B = A^*$.

Aufgabe 39 Seien H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $A, B \in L(H)$. Die adjungierten Operatoren bezeichnen wir mit A^*, B^*:

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle, \quad \langle Bx, y\rangle = \langle x, B^*y\rangle \quad \forall x, y \in H.$$

Zeigen Sie:

(i) $(A + B)^* = A^* + B^*$

(ii) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda}A^*$, für alle $\lambda \in \mathbb{C}$

(iii) $(AB)^* = B^*A^*$

(iv) $\|A^*\|_{L(H)} = \|A\|_{L(H)}$

(v) $\|AA^*\|_{L(H)} = \|A^*A\|_{L(H)} = \|A\|^2_{L(H)}$

(vi) Falls $A^{-1} \in L(H)$, so gilt $(A^*)^{-1} \in L(H)$ und $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.
Hinweis: Zeigen Sie dazu $A^*(A^{-1})^* = I$ und $(A^{-1})^*A^* = I$, wobei $I : H \to H$ die Identität ist.

Aufgabe 40 Sei H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $A \in L(H)$ *selbstadjungiert*, d.h. $A^* = A$.
Zeigen Sie:

(i) Falls $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A ist, d.h. falls für einen Eigenvektor $x_0 \in H\backslash\{0\}$ gilt

$$Ax_0 = \lambda x_0,$$

dann ist $\lambda \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\langle Ax_0, x_0\rangle = \overline{\langle Ax_0, x_0\rangle}$.

(ii) Falls $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{C}$ unterschiedliche Eigenwerte von A sind mit Eigenvektoren x_1 und $x_2 \in H\backslash\{0\}$, so gilt $x_1 \perp x_2$, d.h.

$$\langle x_1, x_2\rangle = 0.$$

Hinweis: Zeigen Sie $\lambda_1\langle x_1, x_2\rangle = \overline{\lambda_2}\langle x_1, x_2\rangle$ und benutzen Sie (i).

Seien X, Y Banachräume. Eine Abbildung $T : X \to Y$. T ist ein *kompakter* Operator, falls für jede beschränkte Folge $(x_k)_{k=1}^\infty \subset X$, also mit $\sup_k \|x_k\|_X < \infty$, gilt: $(Tx_k)_{k=1}^\infty \subset Y$ hat eine (stark) konvergierende Teilfolge.

***Aufgabe 41** Seien X, Y Banachräume, $T : X \to Y$ linear und kompakt.

(i) Zeigen Sie: T ist stetig.
Hinweis: Betrachten Sie die Folge $(x_k)_{k=1}^\infty \subset X$, $\|x_k\|_X \leq 1$ mit

$$\|Tx_k\|_Y \xrightarrow{k\to\infty} \sup_{\|x\|_X\leq 1} \|Tx\|_Y$$

(ii) Ist $(x_k)_{k=1}^\infty \subset X$ eine schwach konvergente Folge gegen ein $x \in X$, so ist $(Tx_k)_{k=1}^\infty$ stark konvergent gegen Tx.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass jede Teilfolge von $(Tx_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset Y$ eine konvergente Teilfolge besitzt. Dann sei $y^* \in Y^*$. Zeigen Sie $y^* \circ T \in X^*$. Zeigen Sie damit, dass jede *konvergente* Teilfolge von $(Tx_k)_{k\in\mathbb{N}}$ den gleichen Limes hat (Konsequenz aus den Hahn-Banach-Aussagen!). Dann folgt die Behauptung aus dem Teilfolgenprinzip.