Universität Basel
Departement Mathematik und Informatik
Dr. Armin Schikorra
Dominik Himmelsbach

Lösungsskizze zur Übung zur Funktionalanalysis Serie 11 vom 06.05.2015

Aufgabe 38 Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $A \in L(H)$. Für ein gegebenes $y \in H$ betrachten wir die Abbildung $T_y : H \to \mathbb{C}$

$$T_y : x \mapsto \langle Ax, y \rangle.$$

(i) Da das Skalarprodukt in der ersten Variablen linear ist, ist auch T_y als Kombination von zwei linearen Funktionen linear. Mit Cauchy-Schwarz gilt

$$\sup_{\|x\|_H \le 1} |T_y x| \le \sup_{\|x\|_H \le 1} \|Ax\|_H \, \|y\|_H = \|A\|_{L(H)} \, \|y\|_H,$$

Also ist $T_y \in H^*$ mit

$$\|T_y\|_{H^*} \le \|A\|_{L(H)} \, \|y\|_H.$$

(ii) Für festes $y \in H$ existiert nach dem Darstellungssatz von Riesz auf Hilberträumen genau ein $z = z(y)$ so dass

$$T_y x = \langle x, z \rangle \quad \forall x \in H.$$

(iii) Für $y_1, y_2, x \in H$ sowie $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned}\langle x, A^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \rangle = T_{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}(x) &= \overline{\lambda_1} \langle Ax, y_1 \rangle + \overline{\lambda_2} \langle Ax, y_1 \rangle \\ &= \overline{\lambda_1} T_{y_1} x + \overline{\lambda_2} T_{y_2} x = \overline{\lambda_1} \langle x, A^* y_1 \rangle + \overline{\lambda_2} \langle x, A^* y_2 \rangle \\ &= \langle x, \lambda_1 A^* y_1 + \lambda_2 A^* y_2 \rangle.\end{aligned}$$

Es gilt also

$$\langle x, A^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 - \lambda_1 A^* y_1 - \lambda_2 A^* y_2 \rangle = 0 \quad \forall x \in H.$$

Indem wir $x := A^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) - \lambda_1 A^* y_1 - \lambda_2 A^* y_2$ setzen, impliziert dies

$$\|A^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) - \lambda_1 A^* y_1 - \lambda_2 A^* y_2\|_H^2 = 0$$

Somit gilt

$$0 = A^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) - \lambda_1 A^* y_1 - \lambda_2 A^* y_2$$

also ist A^* linear.

(iv) Es gilt

$$\|A\|_{L(H)} = \sup_{\|x\|_H \le 1} \|Ax\|_H.$$

Für jedes $z \in H$ gilt außerdem,

$$\|z\|_H = \sup_{\|y\|_H \le 1} |\langle z, y \rangle|,$$

mit Satz 5.6 und Satz 5.9.

Also gilt

$$\begin{aligned}
\|A\|_{L(H)} &= \sup_{\|x\|_H \le 1} \|Ax\|_H \\
&= \sup_{\|x\|_H \le 1} \sup_{\|y\|_H \le 1} |\langle Ax, y\rangle| \\
&= \sup_{\|x\|_H \le 1} \sup_{\|y\|_H \le 1} |\langle x, A^* y\rangle| \\
&= \sup_{\|y\|_H \le 1} \sup_{\|x\|_H \le 1} |\langle x, A^* y\rangle| \\
&= \sup_{\|y\|_H \le 1} \|A^* y\|_H = \|A^*\|_{L(H)}
\end{aligned}$$

(v) Per Definition von A^* gilt

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle \quad \forall x, y \in H$$

Gilt dies auch für ein $B \in L(H)$

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, By\rangle \quad \forall x, y \in H,$$

so folgt

$$\langle x, A^* y\rangle = \langle x, By\rangle$$

also

$$\langle x, A^* y - By\rangle \quad \forall x, y \in H.$$

Wir wählen wieder $x := A^* y - By$, und erhalten

$$\|A^* y - By\|_H^2 = 0 \quad \forall y \in H.$$

Das bedeutet, dass $A^* = B$.

Aufgabe 39 Seien H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $A, B \in L(H)$. Die adjungierten Operatoren bezeichnen wir mit A^*, B^*:

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle, \quad \langle Bx, y\rangle = \langle x, B^* y\rangle \quad \forall x, y \in H.$$

Zunächst erinnern wir uns das für jedes z_1, z_2 gilt

$$\langle x, z_1\rangle = \langle x, z_2\rangle \, \forall x \in H \quad \Leftrightarrow \quad z_1 = z_2, \tag{1}$$

was aus der Wahl von $x := z_1 - z_2$ folgt.

(i) $(A + B)^* = A^* + B^*$

Für alle $x, y \in H$ gilt

$$\langle x, (A + B)^* y\rangle = \langle (A + B)x, y\rangle = \langle Ax, y\rangle + \langle Bx, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle + \langle x, B^* y\rangle$$

also

$$\langle x, (A + B)^* y\rangle = \langle x, A^* y + B^* y\rangle$$

Mit (1) folgt $(A + B)^* y = A^* y + B^* y$, was für beliebiges $y \in H$ gilt.

(ii) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$, für alle $\lambda \in \mathbb{C}$

Für alle $x, y \in H$

$$\langle x, (\lambda A)^* y\rangle = \lambda \langle Ax, y\rangle = \lambda \langle x, A^* y\rangle = \langle x, \overline{\lambda}\, A^* y\rangle$$

Die Behauptung folgt wieder mit (1).

(iii) $(AB)^* = B^* A^*$

$$\langle x, (AB)^* y\rangle = \langle ABx, y\rangle = \langle Bx, A^* y\rangle = \langle x, B^* A^* y\rangle$$

(iv) $\|A^*\|_{L(H)} = \|A\|_{L(H)}$
Siehe Aufgabe 38(iv)

(v) $\|AA^*\|_{L(H)} = \|A^*A\|_{L(H)} = \|A\|^2_{L(H)}$
(vgl. Aufgabe 38(iv))

$$\|AA^*\|_{L(H)} = \sup_{\|x\|_H \le 1, \|y\| \le 1} |\langle AA^* x, y\rangle| = \sup_{\|x\|_H \le 1, \|y\| \le 1} |\langle x, A^* A y\rangle| = \sup_{\|x\|_H \le 1, \|y\| \le 1} |\langle A^* A y, x\rangle| = \|A^* A\|_H.$$

Außerdem, mit Cauchy-Schwarz,

$$\|AA^*\|_{L(H)} = \sup_{\|x\|_H \le 1, \|y\| \le 1} |\langle AA^* x, y\rangle| = \sup_{\|x\|_H \le 1, \|y\| \le 1} |\langle Ax, Ay\rangle| \le \sup_{\|x\|_H \le 1, \|y\| \le 1} \|Ax\|_H \, \|Ay\|_H = \|A\|^2_{L(H)}$$

und

$$\|AA^*\|_{L(H)} = \sup_{\|x\|_H \le 1, \|y\| \le 1} |\langle Ax, Ay\rangle| \ge \sup_{\|x\|_H \le 1} \|Ax\|_H \, \|Ax\|_H = \|A\|^2_{L(H)}.$$

(vi) Falls $A^{-1} \in L(H)$, so gilt $(A^*)^{-1} \in L(H)$ und $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.
Es gilt für alle $x, y \in H$,

$$\langle x, A^*(A^{-1})^* y\rangle = \langle A^{-1} A x, y\rangle = \langle x, y\rangle$$

also mit (1)

$$A^*(A^{-1})^* y = y \quad \forall y \in H.$$

Es folgt $A^*(A^{-1})^* = I$. Analog folgt auch $(A^{-1})^* A^* = I$. Somit ist A^* injektiv und surjektiv, und die Inverse ist $(A^{-1})^*$.

Aufgabe 40

Sei H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $A \in L(H)$ *selbstadjungiert*, d.h. $A^* = A$.
Zeigen Sie:

(i) Falls $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A ist, d.h. falls für einen Eigenvektor $x_0 \in H \backslash \{0\}$ gilt

$$Ax_0 = \lambda x_0,$$

dann ist $\lambda \in \mathbb{R}$.
Sei λ ein Eigenwert mit $x_0 \in H\backslash\{0\}$ ein Eigenvektor. Es gilt

$$\lambda \|x_0\|^2_H = \langle Ax_0, x_0\rangle = \langle x_0, A^* x_0\rangle = \langle x_0, Ax_0\rangle = \overline{\lambda} \|x_0\|^2_H$$

Da $x_0 \neq 0$ gilt $\lambda = \overline{\lambda}$, d.h. $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Falls $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{C}$ unterschiedliche Eigenwerte von A sind mit Eigenvektoren x_1 und $x_2 \in H\backslash\{0\}$, so gilt $x_1 \perp x_2$, d.h.

$$\langle x_1, x_2\rangle = 0.$$

Es gilt

$$\lambda_1 \langle x_1, x_2\rangle = \langle \lambda x_1, x_2\rangle = \langle Ax_1, x_2\rangle = \langle x_1, A^* x_2\rangle = \langle x_1, Ax_2\rangle = \langle x_1, \lambda_2 x_2\rangle = \overline{\lambda_2} \langle x_1, x_2\rangle$$

Somit gilt

$$(\lambda_1 - \overline{\lambda_2}) \langle x_1, x_2\rangle = 0.$$

Da $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ unterschiedliche Zahlen sind, gilt $(\lambda_1 - \overline{\lambda_2}) = \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$, und es folgt

$$\langle x_1, x_2\rangle = 0.$$

Seien X, Y Banachräume. Eine Abbildung $T : X \to Y$. T ist ein *kompakter* Operator, falls für jede beschränkte Folge $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset X$, also mit $\sup_k \|x_k\|_X < \infty$, gilt: $(Tx_k)_{k=1}^{\infty} \subset Y$ hat eine (stark) konvergierende Teilfolge.

***Aufgabe 41** Seien X, Y Banachräume, $T : X \to Y$ linear und kompakt.

(i) Zeigen Sie: T ist stetig.

Da T linear ist, bleibt zu zeigen dass

$$\sup_{\|x\|_X \le 1} \|Tx\|_Y < \infty.$$

Angenommen,

$$\sup_{\|x\|_X \le 1} \|Tx\|_Y = \infty,$$

dann existiert eine Folge $x_k \in X$ mit $\|x_k\|_X \le 1$ und $\liminf_{k\to\infty} \|Tx_k\|_Y = \infty$. Andererseits ist T kompakt und die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt, also konvergiert für eine Teilfolge k_i die Folge $(Tx_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ in Y. Insbesondere gilt

$$\sup_{i\in\mathbb{N}} \|Tx_{k_i}\|_Y < \infty.$$

Dies ist ein Widerspruch zu $\liminf_{k\to\infty} \|Tx_k\|_Y = \infty$.

(ii) Ist $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset X$ eine schwach konvergente Folge gegen ein $x \in X$, so ist $(Tx_k)_{k=1}^{\infty}$ stark konvergent gegen Tx.

Da $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ schwach konvergent ist, ist die Folge auch beschränkt (Satz 5.13). Somit besitzt jede Teilfolge von $(Tx_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine stark konvergente Teilfolge.

Für eine konvergente Teilfolge $(Tx_{k_i})_{i\in\mathbb{N}} \subset Y$ mit Grenzwert $z \in Y$ gilt nun $z = Tx$. Falls dies nicht der Fall wäre, wähle ein $y^* \in Y^*$ so dass $y^*(z) = 0$ und $y^* \circ Tx \neq 0$. Mit der starken Konvergenz von Tx_{k_i} gilt nun

$$y^* \circ T(x_{k_i}) \xrightarrow{i\to\infty} y^* z = 0,$$

und mit der schwachen Konvergenz von x_{k_i} in X gilt wegen $y^* \circ T \in X^*$ (da nach (i) T stetig ist),

$$y^* \circ T(x_{k_i}) \xrightarrow{i\to\infty} y^* T(x) \neq 0.$$

Dies ist ein Widerspruch, also gilt $z = Tx$.

Wir haben nun also gezeigt: Jede Teilfolge $(Tx_k)_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt eine konvergente Teilfolge in Y und der Grenzwert jeder konvergenten Teilfolge ist Tx.

Nun folgt die Konvergenz aus dem Teilfolgenprinzip:

Zur Erinnerung: Sei $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset Y$ eine Folge und $y \in Y$. Angenommen jede Teilfolge von $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ hat eine weitere Teilfolge, die gegen y konvergiert. Dann konvergiert auch die ganze Folge (y_k) gegen y.

Beweis des Teilfolgenprinzips: Wir betrachten für $\varepsilon > 0$ die Indexmenge $I_\varepsilon := \{k \in \mathbb{N} : \|y_k - y\|_Y \ge \varepsilon\}$. Dann ist I_ε endlich für alle $\varepsilon > 0$. Tatsächlich: Wäre I_ε unendlich, so betrachten wir die Teilfolge $(y_{k_i})_{i\in I_\varepsilon}$. Nach Voraussetzung existiert eine Teilfolge $k_{i_j} \subset I_\varepsilon$ so dass $y_{k_{i_j}} \xrightarrow{j\to\infty} y$. Das bedeutet aber, dass für schließlich alle $j \in \mathbb{N}$ die Folgenglieder $\|y_{k_{i_j}} - y\|_Y < \varepsilon$ und somit $k_{i_j} \notin I_\varepsilon$ für schließlich alle $j \in \mathbb{N}$ - ein Widerspruch zu der Tatsache, dass k_{i_j} eine Teilfolge in I_ε sein muss.

Also ist I_ε endlich für alle $\varepsilon > 0$, und dies ist gerade die Definition von Konvergenz $y_k \xrightarrow{k\to\infty} y$.
