

Übungen zur Funktionalanalysis Serie 11 vom 06.05.2015

Für eine kontinuierliche Verbesserung der Vorlesung haben Sie hier die Möglichkeit einer Meinungsabgabe

	1	2	3	4	5
Diese Übung ist zu leicht (1), zu schwierig (5)	<input type="checkbox"/>				
Diese Übung ist langweilig (1), interessant (5)	<input type="checkbox"/>				
Die letzte Vorlesung war unverständlich (1), verständlich (5)	<input type="checkbox"/>				
Die letzte Vorlesung war langweilig (1), interessant (5)	<input type="checkbox"/>				
Kommentare zur Verbesserung:					

Das *komplexe* Skalarprodukt eines \mathbb{C} -Prä-Hilbertraumes H , $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{C}$, erfüllt folgende Eigenschaften:

- $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$ und $\langle x, x \rangle \geq 0$
- $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, dabei ist $\overline{a + ib} = a - ib$ für $a, b \in \mathbb{R}$
- $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

Aufgabe 38 Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein \mathbb{C} -Hilbertraum und $A \in L(H)$. Für ein gegebenes $y \in H$ betrachten wir die Abbildung $T_y : H \rightarrow \mathbb{C}$

$$T_y : x \mapsto \langle Ax, y \rangle.$$

Zeigen Sie:

(i) $T_y \in H^*$.

(ii) Es existiert genau ein $z = z(y) \in H$ mit

$$T_y x = \langle x, z \rangle \quad \forall x \in H.$$

(iii) Dieses $z(y)$ definieren wir als $A^*y \in H$. Zeigen Sie, dass A^* linear ist.

(iv) Es gilt

$$\|A\|_{L(H)} = \|A^*\|_{L(H)}.$$

(v) $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle$ für alle $x, y \in H$. Für jedes $B \in L(H)$ mit $\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle$ für alle $x, y \in H$ gilt $B = A^*$.

Aufgabe 39 Seien H ein \mathbb{C} -Hilbertraum und $A, B \in L(H)$. Die adjungierten Operatoren bezeichnen wir mit A^*, B^* :

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle, \quad \langle Bx, y \rangle = \langle x, B^*y \rangle \quad \forall x, y \in H.$$

Zeigen Sie:

- (i) $(A + B)^* = A^* + B^*$
- (ii) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda}A^*$, für alle $\lambda \in \mathbb{C}$
- (iii) $(AB)^* = B^*A^*$
- (iv) $\|A^*\|_{L(H)} = \|A\|_{L(H)}$
- (v) $\|AA^*\|_{L(H)} = \|A^*A\|_{L(H)} = \|A\|_{L(H)}^2$
- (vi) Falls $A^{-1} \in L(H)$, so gilt $(A^*)^{-1} \in L(H)$ und $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Aufgabe 40 Sei H ein \mathbb{C} -Hilbertraum und $A \in L(H)$ *selbstadjungiert*, d.h. $A^* = A$.

Zeigen Sie:

- (i) Falls $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A ist, d.h. falls für einen Eigenvektor $x_0 \in H \setminus \{0\}$ gilt

$$Ax_0 = \lambda x_0,$$

dann ist $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (ii) Falls $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{C}$ unterschiedliche Eigenwerte von A sind mit Eigenvektoren x_1 und $x_2 \in H \setminus \{0\}$, so gilt $x_1 \perp x_2$, d.h.

$$\langle x_1, x_2 \rangle = 0.$$

Seien X, Y Banachräume. Eine Abbildung $T : X \rightarrow Y$. T ist ein *kompakter* Operator, falls für jede beschränkte Folge $(x_k)_{k=1}^\infty \subset X$, also mit $\sup_k \|x_k\|_X < \infty$, gilt: $(Tx_k)_{k=1}^\infty \subset Y$ hat eine (stark) konvergierende Teilfolge.

***Aufgabe 41** Seien X, Y Banachräume, $T : X \rightarrow Y$ linear und kompakt.

- (i) Zeigen Sie: T ist stetig.
 - (ii) Ist $(x_k)_{k=1}^\infty \subset X$ eine schwach konvergente Folge gegen ein $x \in X$, so ist $(Tx_k)_{k=1}^\infty$ stark konvergent gegen Tx .
-