Universität Basel
Departement Mathematik und Informatik
Dr. Armin Schikorra
Dominik Himmelsbach

Übungen zur Funktionalanalysis Serie 12 vom 13.05.2015

Für eine kontinuierliche Verbesserung der Vorlesung haben Sie hier die Möglichkeit einer Meinungsabgabe

	1	2	3	4	5
Diese Übung ist zu leicht (1), zu schwierig (5)	□	□	□	□	□
Diese Übung ist langweilig (1), interessant (5)	□	□	□	□	□
Die letzte Vorlesung war unverständlich (1), verständlich (5)	□	□	□	□	□
Die letzte Vorlesung war langweilig (1), interessant (5)	□	□	□	□	□

Kommentare zur Verbesserung:

Aufgabe 42 Zeigen Sie: Sei X ein $\mathbb{C}$-Banachraum und $A \in L(X)$. Dann sind die Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten linear unabhängig.

Sei also für $(\lambda_i)_{i=1}^n \subset \mathbb{C}$ mit $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$ eine Folge von Eigenvektoren gebeben:

$$\{x_1, \ldots, x_n\} \subset X \backslash \{0\}$$

mit

$$Ax_i = \lambda_i x_i \quad i = 1, \ldots, n.$$

Wir zeigen, dass $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ein linear unabhängiges System ist.

Wir führen dazu eine Induktion über n durch. Für $n = 1$ ist $x_1 \neq 0$ und somit ist der Induktionsanfang gezeigt.

Seien nun $x_1, \ldots, x_n$ linear unabhängig. Und angenommen für gewisse $\alpha_j \in \mathbb{C}$ gilt

$$\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j x_j = 0. \tag{1}$$

Durch Multiplikation mit λ_{n+1} erhalten wir

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{n+1} \alpha_j x_j + \lambda_{n+1} \alpha_{n+1} x_{n+1} = 0. \tag{2}$$

Durch Anwendung von A erhalten wir aber auch

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j x_j + \lambda_{n+1} \alpha_{n+1} x_{n+1} = 0. \tag{3}$$

Substrahieren wir (3) von (2) so ergibt sich

$$\sum_{j=1}^{n} (\lambda_j - \lambda_{n+1}) \alpha_j x_j = 0.$$

Da nach Induktionsvoraussetzung $x_1, \ldots, x_n$ linear unabhängig sind, gilt

$$(\lambda_j - \lambda_{n+1})\alpha_j = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

Da $\lambda_j \neq \lambda_{n+1}$ für alle $j = 1, \ldots, n$ bedeutet dies

$$\alpha_j = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Somit wir (1) zu

$$\alpha_{n+1} x_{n+1} = 0,$$

also gilt wegen $x_{n+1} \neq 0$ auch $\alpha_{n+1} = 0$ und wir haben gezeigt, dass $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 43 Gegeben sei der Hilbertraum $H = l^2(\mathbb{N})$ mit der üblichen l^2-Norm. Betrachten Sie den Shiftoperator $A : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$

$$A(x_1, x_2, x_3, \ldots) := (0, x_1, x_2, x_3, \ldots) \quad \text{für } (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in l^2(\mathbb{N}).$$

Sei ausserdem $I : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ die Identität.

Zeigen Sie

(i) $A \in L(H)$ und $\|A\|_{L(H)} = 1$.

Offenbar ist A linear. Es gilt

$$\|A(x_1, \ldots)\|_{l^2} = \left(\sum_{i=2}^{\infty} (x_{i-1})^2\right)^{\frac{1}{2}} == \left(\sum_{i=1}^{\infty} (x_i)^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|(x_1, \ldots)\|_{l^2}$$

(ii) $A - I$ ist injektiv.

Es gilt

$$(A - I)(x_1, x_2, \ldots) = (-x_1, x_1 - x_2, x_2 - x_3, \ldots)$$

Angenommen $(A - I)(x_1, x_2, \ldots) = 0$, dann gilt also $x_1 = 0$. $x_1 = 0$ und $x_i - x_{i+1} = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Also ist $x_i = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Somit ist $A - I$ injektiv.

(iii) Finden Sie die Folge $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ so dass $(A - I)x = (1, 0, 0, \ldots)$ und zeigen Sie $x \notin l^2(\mathbb{N})$

Mit der Darstellung von $A - I$ oben gilt für $(A - I)x = (1, 0, \ldots)$ dass $x_1 = 1$ und $x_i - x_{i+1} = 0$. Also gilt $x = (1, 1, 1, \ldots)$. Diese Folge ist keine Nullfolge und somit $x \notin l^2$.

(iv) $A - I$ ist nicht surjektiv.

Folgt sofort aus (iii): Es gibt kein $x \in l^2(\mathbb{N})$ so dass $(A - I)x = (1, 0, 0, \ldots)$.

(v) A ist nicht kompakt als Operator in $L(H)$.

Wir betrachten die Folge $(e_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset l^2(\mathbb{N})$ aus Aufgabe 28. Es gilt $Ae_i = e_{i+1}$. Insbesondere gilt $\|Ae_i - Ae_j\| = 2$ für alle $i \neq j$. Somit existiert keine konvergente Teilfolge von $(Ae_i)_{i \in \mathbb{N}}$ aber $(e_i)_{i \in l^2}$ ist beschränkt. Somit ist A nicht kompakt.

---

*Aufgabe 44 Sei H ein $\mathbb{C}$-Hilbertraum und $A \in L(H)$ kompakt und selbstadjungiert. Wir wissen, dass alle Eigenwerte von A reell sind. Zeigen Sie weiterhin, dass

$$\sup\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\} = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$$

und

$$\|A\|_{L(H)} = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}. \tag{4}$$

(i) Setze $\gamma := \|A\|_{L(H)}$.
Nach Satz 7.7. gilt

$$\|A\|_{L(H)} = \sup_{\|x\|_H \leq 1} |\langle Ax, x\rangle| \geq \sup_{x \in \mathcal{O}} |\langle Ax, x\rangle|$$

wobei $\mathcal{O}$ die Menge der normierten Eigenvektoren ist:

$$\mathcal{O} = \{x \in H : \quad \|x\|_H = 1 \text{ und für ein } \lambda \in \mathbb{C} \text{ gilt } Ax = \lambda x\}.$$

Für jeden Eigenwert λ mit Eigenvektor x, $\|x\|_H = 1$ gilt nun

$$|\langle Ax, x\rangle| = |\lambda \|x\|_H^2| = |\lambda|.$$

Also gilt

$$\gamma \geq \sup\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}.$$

(ii) Wieder mit Satz 7.7. gilt

$$\gamma = \sup_{\|x\|_H \leq 1} |\langle Ax, x\rangle|$$

Somit können wir eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H$ finden mit $\|x_k\|_H = 1$ so dass

$$\gamma = \lim_{k\to\infty} |\langle Ax_k, x_k\rangle|,$$

Da A selbstadjungiert ist gilt

$$\langle Ax_k, x_k\rangle = \langle x_k, Ax_k\rangle = \overline{\langle Ax_k, x_k\rangle},$$

also ist $\langle Ax_k, x_k\rangle \in \mathbb{R}$.
Also existiert eine Teilfolge von x_k (der Einfachheit halber wieder mit x_k bezeichnet) so dass entweder

$$\langle Ax_k, x_k\rangle = |\langle Ax_k, x_k\rangle| \quad \forall k$$

oder

$$\langle Ax_k, x_k\rangle = -|\langle Ax_k, x_k\rangle| \quad \forall k.$$

Insbesondere existiert für diese Teilfolge

$$\beta := \lim_{k\to\infty} \langle Ax_k, x_k\rangle$$

Weiterhin gilt

$$\|Ax_k\|_H \leq \|A\|_{L(H)} \, \|x_k\|_H = \gamma.$$

Da $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt und A kompakt ist, können wir eine weitere Teilfolge (wieder mit x_k bezeichnet) wählen, so dass

$$Ax_k \xrightarrow{k\to\infty} y \quad \text{für ein } y \in H.$$

(iii) Es gilt

$$\begin{aligned}\|Ax_k - \beta x_k\|_H^2 &= \|Ax_k\|^2 + \beta^2 \|x_k\|_H^2 - 2\beta\langle Ax_k, x_k\rangle \\ &\leq \gamma^2 + \beta^2 - 2\beta\langle Ax_k, x_k\rangle\end{aligned}$$

Da $|\gamma| = |\beta|$ und $\langle Ax_k, x_k\rangle \in \mathbb{R}$ bedeutet dies:

$$\|Ax_k - \beta x_k\|_H^2 \leq 2\beta^2 - 2\beta \operatorname{Re}\langle Ax_k, x_k\rangle$$

(iv) Da nun per Konstruktion von x_k gilt dass $\langle Ax_k, x_k\rangle \xrightarrow{k\to\infty} \beta$, haben wir

$$\lim_{k\to\infty} \|Ax_k - \beta x_k\|_H^2 \leq 2\beta^2 - 2\beta^2 = 0.$$

Auf der anderen Seite gilt $Ax_k \to y$ und somit konvergiert $\beta x_k \to y$. Also konvergiert $x_k \to x := \frac{1}{\beta} y$ und wegen der obigen Abschätzung gilt $Ax = \beta x$ – falls $\beta \neq 0$. Wir können o.B.d.A. annehmen, dass $\beta \neq 0$, denn falls $\beta = 0$ ist $\gamma = 0$ und es ist nichts zu zeigen.

(v) Also ist β ein Eigenwert von A. Somit gilt

$$\gamma = |\beta| \leq \sup\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}.$$

(vi) Es gilt nun

$$\gamma = |\beta| \leq \sup\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\} \overset{(i)}{\leq} \gamma = |\beta|$$

Es gilt also Gleichheit, und da β ein Eigenwert von A ist, ist das Supremum ein Maximum.
