Universität Basel
Departement Mathematik und Informatik
Dr. Armin Schikorra
Dominik Himmelsbach

Übungen zur Funktionalanalysis Serie 2 vom 04.03.2015

Für eine kontinuierliche Verbesserung der Vorlesung haben Sie hier die Möglichkeit einer Meinungsabgabe

	1	2	3	4	5
Diese Übung ist zu leicht (1), zu schwierig (5)	□	□	□	□	□
Diese Übung ist langweilig (1), interessant (5)	□	□	□	□	□
Die letzte Vorlesung war unverständlich (1), verständlich (5)	□	□	□	□	□
Die letzte Vorlesung war langweilig (1), interessant (5)	□	□	□	□	□

Kommentare zur Verbesserung:

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass

$$C^0([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f \text{ stetig}\},$$

also die Menge der stetigen Funktionen auf $[0,1]$ mit der L^∞-Norm

$$\|f\|_{L^\infty([0,1])} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

ein Banachraum ist. Für die *Vollständigkeit* können Sie wie folgt vorgehen:
Für eine Cauchy-Folge $(f_n)_{n=1}^\infty \subset C^0([0,1])$ zeigen Sie

- dass (f_n) *gleichgradig stetig* ist, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ so dass } \forall |x-y| < \delta \text{ und } \forall n \in \mathbb{N} \text{ gilt } |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon,$$

- dass der punktweise Limes g, $g(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert
- dass g aufgrund der gleichgradigen Stetigkeit selbst wieder stetig ist
- dass wir daraus folgern können $\lim_{n\to\infty} \|f_n - g\|_{L^\infty([0,1])} = 0$

Aufgabe 6

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $A \subset X$. Zeigen Sie, dass die folgenden vier Definitionen von *Dichtheit* für A äquivalent sind:

(i) $\overline{A} = X$ (recall: $\overline{A} := X\backslash(\mathrm{int}(X\backslash A))$)

(ii) Für jeden Ball $B_r(x) \subset X$ gilt $B_r(x) \cap A \neq \emptyset$

(iii) $\mathrm{int}(X\backslash A) = \emptyset$

(iv) Für jedes $x \in X$ existiert eine Folge $(x_k) \in A$ mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x$.

Aufgabe 7 Vervollständigen Sie den Beweis zum Satz von Baire:

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass die folgenden zwei Aussagen äquivalent sind:

(i) Für alle $U_j \subset X$ mit U_j offen und dicht für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt: Auch $U := \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$ ist dicht.

(ii) Für alle $A_j \subset X$ mit A_j abgeschlossen für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt und $A := \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$: Falls $\operatorname{int} A \neq \emptyset$ so existiert ein $j_0 \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{int} A_{j_0} \neq \emptyset$.

Hinweis: Betrachten Sie, was beide Aussagen bedeuten, wenn Sie U_j durch $X \backslash A_j$, bzw. A_j durch $X \backslash U_j$ ersetzen.

Die Abgabe der Sternchenaufgabe ist freiwillig

***Aufgabe 8** Zeigen Sie mithilfe des Satz von Baire, dass nirgends differenzierbare Funktionen dicht in $(C^0([0,1], \|\cdot\|_{L^\infty([0,1])})$.

Betrachten Sie dazu die Menge

$$\mathcal{O}_j := \left\{ g \in C^0([0,1]) : \inf_{x \in [0,1]} \sup_{0 < |h| < \frac{1}{j}} \frac{|g(x+h) - g(x)|}{|h|} > j \right\}$$

und zeigen Sie

(i) $\mathcal{O}_j$ is offen für alle $j \in \mathbb{N}$.

(ii) $\mathcal{O}_j$ is dicht für alle $j \in \mathbb{N}$ (Hinweis: Sie können jede stetige Funktion durch Polynome approximieren (Weierstraßscher Approximationssatz))

(iii) Jedes Element von $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_j$ ist stetig, aber nirgendwo differenzierbar.

(iv) Wenden Sie den Satz von Baire auf $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_j$ an, um die Behauptung zu erhalten.
