Universität Basel
Departement Mathematik und Informatik
Dr. Armin Schikorra
Dominik Himmelsbach

Übungen zur Funktionalanalysis Serie 3 vom 11.03.2015

Für eine kontinuierliche Verbesserung der Vorlesung haben Sie hier die Möglichkeit einer Meinungsabgabe

	1	2	3	4	5
Diese Übung ist zu leicht (1), zu schwierig (5)	□	□	□	□	□
Diese Übung ist langweilig (1), interessant (5)	□	□	□	□	□
Die letzte Vorlesung war unverständlich (1), verständlich (5)	□	□	□	□	□
Die letzte Vorlesung war langweilig (1), interessant (5)	□	□	□	□	□

Kommentare zur Verbesserung:

Aufgabe 9 Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Vektorraum. Zeigen Sie, dass die Abbildung $x \mapsto \|x\|_X$ Lipschitz stetig und konvex ist.

Aufgabe 10 Zeigen Sie: Auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum X sind je zwei Normen äquivalent: d.h. falls $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf X sind, dann gibt es zwei Konstanten $\lambda, \Lambda > 0$ so dass

$$\lambda \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \Lambda \|x\|_2 \quad \text{für alle } x \in X.$$

Sie können wie folgt vorgehen: Wählen Sie eine Basis $(e_1, \ldots, e_n)$ von X (für $n = \dim X$) und beweisen Sie

(i) $(X, \|\cdot\|_*)$ ist ein normierter Vektorraum. Dabei ist mit der Darstellung $x = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i$ mit $\mu_i \in \mathbb{R}$

$$\|x\|_* := |(\mu_1, \ldots, \mu_n)|_2 \equiv (\sum_{i=1}^n (\mu_i)^2)^{\frac{1}{2}}$$

(ii) Fassen Sie die Abbildung $\phi : (\mu_1, \ldots, \mu_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \mu_i e_i$ als Abbildung $\phi : (\mathbb{R}^n, |\cdot|_2) \to (X, \|\cdot\|_1)$ auf, und zeigen Sie, dass sie stetig ist (Hinweis: Satz 4.2!).

(iii) Mit Kompaktheit der Einheitsspäre in $(\mathbb{R}^n, |\cdot|_2)$ schliessen Sie, dass

$$\tilde{\lambda} := \min_{|(\mu_1,\ldots,\mu_n)|_2 = 1} \|\phi(\mu_1, \ldots, \mu_n)\|_1$$

existiert und $\tilde{\lambda} > 0$ ist.

(iv) Folgern Sie daraus, dass

$$\tilde{\lambda} \leq \|x\|_1 \leq \Lambda \quad \text{für alle } x \in X \text{ mit } \|x\|_* = 1$$

und schließen Sie, dass $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_*$ äquivalente Normen sind.

(v) Da analog auch $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_*$ äquivalente Normen sind, schließen Sie, dass $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_1$ äquivalente Normen sind.

Aufgabe 11 Die l^1 und l^∞-Folgennorm is gegeben durch

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{l^\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{l^1} = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|.$$

Wir betrachten den Vektorraum $l^1(\mathbb{N})$ (also der Raum der Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{l^1} < \infty$).

(i) Zeigen Sie, dass $l^1(\mathbb{N})$ sowohl mit $\|\cdot\|_{l^\infty}$ als auch mit $\|\cdot\|_{l^1}$ ein normierter Vektorraum ist.

(ii) Sind die Normen $\|\cdot\|_{l^\infty}$ und $\|\cdot\|_{l^1}$ äquivalent? (vgl. Aufgabe 10)

(iii) Ist $(l^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{l^\infty})$ ein Banach-Raum?

***Aufgabe 12** Zeigen Sie, dass die Vervollständigung eines metrischen Raumes (X, d_X) bis auf Isometrien eindeutig ist:

Seien (Y, d_Y), (Z, d_Z) vollständige metrische Räume und $\phi_1 : X \to Y$, $\phi_2 : X \to Z$ Isometrien. Mit $\tilde{Y} := \overline{\phi_1(X)}^Y$ bezeichnen wir den Abschluss von $\phi_1(X) \subset Y$ in (Y, d_Y). Analog bezeichnen wir mit $\tilde{Z} := \overline{\phi_2(X)}^Z$ den Abschluss von $\phi_2(X) \subset Z$ in (Z, d_Z). Zeigen Sie, dass dann eine bijektive Abbildung $\psi : \tilde{Y} \to \tilde{Z}$ existiert, so dass ψ und die Umkehrfunktion ψ^{-1} Isometrien sind.

Sie können wie folgt vorgehen: Unter reger Zuhilfenahme der Isometrie-Bedingung von ϕ_1 und ϕ_2 zeigen Sie die folgenden Aussagen

(i) Für jedes $y \in \tilde{Y}$ existiert (mindestens) eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty \subset X$ so dass $\lim_{n\to\infty} \phi_1(x_n) = y$.

(ii) Für zwei Folgen $(x_n)_{n=1}^\infty$, $(\tilde{x}_n)_{n=1}^\infty \subset X$ gilt $\lim_{n\to\infty} \phi_1(x_n) = \lim_{n\to\infty} \phi_1(\tilde{x}_n)$ genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} \phi_2(x_n) = \lim_{n\to\infty} \phi_2(\tilde{x}_n)$

(iii) Die folgende Abbildung $\psi : \tilde{Y} \to \tilde{Z}$ ist wohldefiniert: Für $y \in \tilde{Y}$ wähle eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty \subset X$ mit $\lim_{n\to\infty} \phi_1(x_n) = y$. Dann setzen wir
$$\psi(y) := \lim_{n\to\infty} \phi_2(x_n).$$

(iv) Die Abbildung $\psi : \tilde{Y} \to \tilde{Z}$ ist bijektiv. Sowohl ψ also auch ψ^{-1} sind Isometrien.