Universität Basel
Departement Mathematik und Informatik
Dr. Armin Schikorra
Dominik Himmelsbach

Übungen zur Funktionalanalysis Serie 3 vom 11.03.2015

Für eine kontinuierliche Verbesserung der Vorlesung haben Sie hier die Möglichkeit einer Meinungsabgabe

	1	2	3	4	5
Diese Übung ist zu leicht (1), zu schwierig (5)	□	□	□	□	□
Diese Übung ist langweilig (1), interessant (5)	□	□	□	□	□
Die letzte Vorlesung war unverständlich (1), verständlich (5)	□	□	□	□	□
Die letzte Vorlesung war langweilig (1), interessant (5)	□	□	□	□	□

Kommentare zur Verbesserung:

***Aufgabe 12** Zeigen Sie, dass die Vervollständigung eines metrischen Raumes (X, d_X) bis auf Isometrien eindeutig ist:

Seien (Y, d_Y), (Z, d_Z) vollständige metrische Räume und $\phi_1 : X \to Y$, $\phi_2 : X \to Z$ Isometrien. Mit $\tilde{Y} := \overline{\phi_1(X)}^Y$ bezeichnen wir den Abschluss von $\phi_1(X) \subset Y$ in (Y, d_Y). Analog bezeichnen wir mit $\tilde{Z} := \overline{\phi_2(X)}^Z$ den Abschluss von $\phi_2(X) \subset Z$ in (Z, d_Z). Zeigen Sie, dass dann eine bijektive Abbildung $\psi : \tilde{Y} \to \tilde{Z}$ existiert, so dass ψ und die Umkehrfunktion ψ^{-1} Isometrien sind.

Sie können wie folgt vorgehen: Unter reger Zuhilfenahme der Isometrie-Bedingung von ϕ_1 und ϕ_2 zeigen Sie die folgenden Aussagen

(i) Für jedes $y \in \tilde{Y}$ existiert (mindestens) eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty \subset X$ so dass $\lim_{n\to\infty} \phi_1(x_n) = y$.

(ii) Für zwei Folgen $(x_n)_{n=1}^\infty$, $(\tilde{x}_n)_{n=1}^\infty \subset X$ gilt $\lim_{n\to\infty} \phi_1(x_n) = \lim_{n\to\infty} \phi_1(\tilde{x}_n)$ genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} \phi_2(x_n) = \lim_{n\to\infty} \phi_2(\tilde{x}_n)$

(iii) Die folgende Abbildung $\psi : \tilde{Y} \to \tilde{Z}$ ist wohldefiniert: Für $y \in \tilde{Y}$ wähle eine Folge $(x_n)_{n=1}^\infty \subset X$ mit $\lim_{n\to\infty} \phi_1(x_n) = y$. Dann setzen wir
$$\psi(y) := \lim_{n\to\infty} \phi_2(x_n).$$

(iv) Die Abbildung $\psi : \tilde{Y} \to \tilde{Z}$ ist bijektiv. Sowohl ψ also auch ψ^{-1} sind Isometrien.

Zu (i):

Sei $y \in \tilde{Y}$. Dann existiert eine Folge $y_n \in \phi_1(X)$ mit $\lim_{n\to\infty} d_Y(y_n, y) = 0$. Da $y_n \in \phi_1(X)$ existieren $x_n \in X$ so dass $y_n = \phi_1(x_n)$. Insbesondere gilt $\lim_{n\to\infty} \phi_1(x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n = y$ in Y.

Zu (ii):

Da ϕ_1 eine Isometrie ist, gilt, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ ist eine Cauchy-Folge, genau dann wenn $(\phi_1(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in Y konvergiert: Tatsächlich impliziert
$$d_X(x_n, x_m) = d_Y(\phi_1(x_n), \phi_1(x_m)),$$

dass (x_n) eine Cauchy-Folge ist, genau dann wenn $\phi_1(x_n) \subset Y$ eine Cauchy-Folge ist (und somit wegen der Vollständigkeit von Y konvergent ist). Analoges gilt für ϕ_2.

Für je zwei Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ (\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset$ mit $\lim_{n\to\infty} \phi_1(x_n) = \lim_{n\to\infty} \phi_1(\tilde{x}_n) Y$ gilt mit der Isometrie-Eigenschaft

$$d_Y(\phi_1(x_n), \phi_1(\tilde{x}_n)) = d_X(x_n, \tilde{x}_n) = d_Z(\phi_2(x_n), \phi_2(\tilde{x}_n)),$$

das $\phi_1(x_n)$ und $\phi_1(\tilde{x}_n)$ den gleichen Limes in Y haben genau dann wenn $\phi_2(x_n)$ und $\phi_2(\tilde{x}_n)$ den gleichen Limes in Z haben.

Zu (iii):

Die Abbildung $\psi : \tilde{Y} \to \tilde{Z}$ ist also wohldefiniert: Für jedes $y \in \tilde{Y}$ existiert mindestens eine Folge (x_n) mit $\lim_{n\to\infty} \phi(x_n) = y$, siehe (i). $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in X, und somit ist $\phi_2(x_n)$ konvergent in Z, d.h. es existiert $\lim_{n\to\infty} \phi_2(x_n) \in \tilde{Z}$, nach (ii). Außerdem gilt nach (ii) das Wert $\psi(y)$ unabhängig von der Wahl von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

Zu (iv): Sei $y, \tilde{y} \in \tilde{Y}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ aus der Definition von $\phi(y)$, $\phi(\tilde{y})$. Es gilt

$$d_Z(\psi(y), \psi(\tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} d_Z(\phi_2(x_n), \psi(\tilde{x}_n)) = \lim_{n\to\infty} d_X(x_n, \tilde{x}_n) = \lim_{n\to\infty} d_Y(\phi_1(x_n), \phi_1(\tilde{x}_n)) = d(y, \tilde{y}).$$

Insbesondere ist ψ injektiv.

Sei nun $z, \tilde{z} \in \tilde{Z}$. Wie in (i) gibt es Cauchy-Folgen in X $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}})$ so dass $\lim_{n\to\infty} \phi_2(x_n) = z$, $\lim_{n\to\infty} \phi_2(\tilde{x}_n) = \tilde{z}$ in Z. Nach (ii) sind $y_n := \phi_1(x_n)$, $\tilde{y}_n := \phi_1(\tilde{x}_n)$ konvergent in Y gegen ein y und $\tilde{y}$ in $\tilde{Y}$. Somit gilt $z = \psi(y)$, $\tilde{z} = \psi(\tilde{y})$. ψ also surjektiv. Also ist ψ bijektiv. Insbesondere können wir fuer die vorige Konstruktion schreiben $y = \psi^{-1}(z)$, $\tilde{y} = \psi^{-1}(\tilde{z})$. Mit der obigen Ungleichung gilt also:

$$d_Z(z, \tilde{z}) = d_Y(y, \tilde{y}) \equiv d_Y(\psi^{-1}(z), \psi^{-1}(z))$$

also ist auch ψ^{-1} eine Isometrie.