Universität Basel
Departement Mathematik und Informatik
Dr. Armin Schikorra
Dominik Himmelsbach

Übungen zur
Funktionalanalysis
Serie 4 vom 18.03.2015

Für eine kontinuierliche Verbesserung der Vorlesung haben Sie hier die Möglichkeit einer Meinungsabgabe

	1	2	3	4	5
Diese Übung ist zu leicht (1), zu schwierig (5)	□	□	□	□	□
Diese Übung ist langweilig (1), interessant (5)	□	□	□	□	□
Die letzte Vorlesung war unverständlich (1), verständlich (5)	□	□	□	□	□
Die letzte Vorlesung war langweilig (1), interessant (5)	□	□	□	□	□

Kommentare zur Verbesserung:

Aufgabe 13 Zeigen Sie Proposition 3.6. aus der Vorlesung: Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $A \subset X$ eine überabzählbare Menge, die auch noch diskret ist, d.h.

$$\inf_{x,y\in A,\ x\neq y} d(x, y) > 0,$$

dann ist X *nicht* separabel.

Aufgabe 14 Sei Y ein normierter Vektorraum und $X \subset Y$ ein linearer Unterraum von Y. Zeigen Sie: Falls X offen ist, so gilt $X = Y$.

Aufgabe 15 Seien X und Y Banachräume und $A \in L(X, Y)$. Beweisen Sie den Satz von der stetigen Inversen: Ist $A \in L(X, Y)$ bijektiv, so ist auch $A^{-1} \in L(X, Y)$.

Für die Stetigkeit benutzen Sie den Satz der offenen Abbildung (Open Mapping Theorem): Sind X und Y Banachräume und $A \in L(X, Y)$ und surjektiv, dann ist A offen (d.h. $A(U)$ ist offen für jede offene Menge $U \subset X$).

*Aufgabe 16 Sei $X = C^0([0,1])$ der Raum der stetigen Funktionen versehen mit der L^1-Norm,

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt.$$

Betrachten Sie die Abbildung $A_j : X \to Y$ gegeben durch

$$A_j f = j \int_0^{\frac{1}{j}} f(t)\, dt.$$

und

$$Af := f(0).$$

(i) Zeigen Sie, dass A_j linear, stetig und beschränkt ist, d.h. $A_j \in L(X) = L(X, \mathbb{R})$.

(ii) Zeigen Sie, dass A_j für $j \to \infty$ punktweise gegen Af konvergiert, also dass für jedes $f \in C^0([0,1])$ gilt

$$\lim_{j\to\infty} |A_j f - Af| = 0.$$

(Hinweis: Zeigen und benutzen Sie evtl. die folgende Darstellung

$$A_j f = f(0) + j \int_0^{\frac{1}{j}} (f(t) - f(0))\, dt,$$

und verwenden Sie, dass für stetige Funktionen f gilt $\lim_{\varepsilon\to 0} \sup_{t\in(0,\varepsilon)} |f(t) - f(0)| = 0$.

(iii) Zeigen Sie, dass $A \notin L(X)$. Betrachten Sie Af_n z.B. für die Funktionenfolge $f_n(t) = (1-t)^n$ und zeigen Sie, dass $\|f_n\|_{L^1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

(iv) Wieso ist Korollar 4.9. nicht anwendbar?
