Universität Basel
Departement Mathematik und Informatik
Dr. Armin Schikorra
Dominik Himmelsbach

Übungen zur Funktionalanalysis Serie 5 vom 25.03.2015

Für eine kontinuierliche Verbesserung der Vorlesung haben Sie hier die Möglichkeit einer Meinungsabgabe

	1	2	3	4	5
Diese Übung ist zu leicht (1), zu schwierig (5)	□	□	□	□	□
Diese Übung ist langweilig (1), interessant (5)	□	□	□	□	□
Die letzte Vorlesung war unverständlich (1), verständlich (5)	□	□	□	□	□
Die letzte Vorlesung war langweilig (1), interessant (5)	□	□	□	□	□

Kommentare zur Verbesserung:

Aufgabe 17

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(i) (Beispiel 4.13) Sei $A \in L(X, Y)$, also insbesondere $D(A) = X$, wobei $D(A)$ der Definitionsbereich von A ist. Dann ist A abgeschlossen, d.h. der Graph von A

$$\Gamma_A = \{(x, Ax) : \quad x \in D(A)\}$$

ist eine abgeschlossene Menge im Raum $(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y})$. Dabei ist $X \times Y$ das kartesische Produkt

$$X \times Y = \{(x, y) : \quad x \in X, y \in Y\}$$

und die Norm ist gegeben durch $\|(x, y)\|_{X\times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y$.

Achtung: Machen Sie sich klar, was die Abgeschlossenheit bedeutet, es reicht *nicht* zu zeigen, dass $(x_k, Ax_k) \to (x, Ax)$ konvergiert!

(ii) Sei $(X, \|\cdot\|_X) = (C^0([0, 1]), \|\cdot\|_{L^\infty})$ der Raum der stetigen Funktionen auf $[0, 1]$ versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_{L^\infty}$. Betrachten Sie den linearen Ableitungs-Operator $A := \frac{d}{dt}$, d.h.

$$Af := \frac{d}{dt} f,$$

definiert auf $(D(A), \|\cdot\|_{L^\infty}) := (C^1([0, 1]), \|\cdot\|_{L^\infty}) \subset (X, \|\cdot\|_X)$. Zeigen Sie, dass $A \notin L(D(A), X)$.

(Hinweise: Betrachten Sie das Verhalten der Folge $f_n(t) := t^n$ unter A. $D(A)$ erbt hier die $\|\cdot\|_{L^\infty}$ Norm von C^0)

(iii) Seien X, A und $D(A)$ wie in (ii). Zeigen Sie A ist abgeschlossen.

***Aufgabe 18** Beweisen Sie Satz 4.16 aus der Vorlesung:

Seien X, Y Banach-Räume und $A : D(A) \subset X \to Y$ eine bijektive, lineare Abbildung. Ist A abgeschlossen, so ist die Inverse von $A : D(A) \to Y$ stetig, d.h. es existiert $B \in L(Y, D(A))$ mit

$$ABy = y \quad \forall y \in Y \quad \text{und} \quad BAx = x \quad \forall x \in D(A).$$

Aufgabe 19 Sei X ein Vektorraum versehen mit zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$. Es gelte mit einer Konstanten $C_1 > 0$, dass

$$\|x\|_2 \leq C_1\|x\|_1 \quad \forall x \in X.$$

(i) Zeigen Sie: Ist X vollständig bezüglich beider Normen, so sind die Normen äquivalent, d.h. es gibt auch eine Konstante $C_2 > 0$ so dass

$$\|x\|_1 \leq C_2\|x\|_2 \quad \forall x \in X.$$

Hinweis: Nutzen Sie das Open Mapping Theorem.

(ii) Überlegen Sie sich ein Beispiel, das zeigt, dass die Bedingung der Vollständigkeit bezüglich beider Normen eine notwendige Bedingung ist. (Hinweis: z.B. ein geeigneter Folgenraum).
