Universität Basel
Departement Mathematik und Informatik
Dr. Armin Schikorra
Dominik Himmelsbach

Übungen zur Funktionalanalysis Serie 5 vom 25.03.2015

Für eine kontinuierliche Verbesserung der Vorlesung haben Sie hier die Möglichkeit einer Meinungsabgabe

	1	2	3	4	5
Diese Übung ist zu leicht (1), zu schwierig (5)	☐	☐	☐	☐	☐
Diese Übung ist langweilig (1), interessant (5)	☐	☐	☐	☐	☐
Die letzte Vorlesung war unverständlich (1), verständlich (5)	☐	☐	☐	☐	☐
Die letzte Vorlesung war langweilig (1), interessant (5)	☐	☐	☐	☐	☐

Kommentare zur Verbesserung:

Aufgabe 17

Zeigen Sie folgende Aussagen:

(i) (Beispiel 4.13) Sei $A \in L(X, Y)$, also insbesondere $D(A) = X$, wobei $D(A)$ der Definitionsbereich von A ist. Dann ist A abgeschlossen, d.h. der Graph von A

$$\Gamma_A = \{(x, Ax) : \quad x \in D(A)\}$$

ist eine abgeschlossene Menge im Raum $(X \times Y, \|\cdot\|_{X\times Y})$. Dabei ist $X \times Y$ das kartesische Produkt

$$X \times Y = \{(x, y) : \quad x \in X, y \in Y\}$$

und die Norm ist gegeben durch $\|(x, y)\|_{X\times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y$.

Lösungsskizze: Sei $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Gamma_A$ und $(x_n, y_n) \xrightarrow{n\to\infty} (x, y) \in X \times Y$. Zu zeigen ist, dass $(x, y) \in \Gamma_A$. Es gilt $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ in X und $y_n \xrightarrow{n\to\infty} y$ in Y. Da $x \in X = D(A)$ bleibt zu zeigen, dass $y = Ax$. Aus $(x_n, y_n) \in \Gamma_A$ folgt $y_n = Ax_n$. Da $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$ und A stetig ist, gilt $y_n = Ax_n \xrightarrow{n\to\infty} Ax$ in Y. Auf der anderen Seite gilt $y_n \xrightarrow{n\to\infty} y$ in Y. Wegen der Eindeutigkeit des Limes muss also gelten $y = Ax$. Insbesondere $(x, y) \in \Gamma_A$.

(ii) Sei $(X, \|\cdot\|_X) = (C^0([0, 1]), \|\cdot\|_{L^\infty})$ der Raum der stetigen Funktionen auf $[0, 1]$ versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_{L^\infty}$. Betrachten Sie den linearen Ableitungs-Operator $A := \frac{d}{dt}$, d.h.

$$Af := \frac{d}{dt} f,$$

definiert auf $(D(A), \|\cdot\|_{L^\infty}) := (C^1([0, 1]), \|\cdot\|_{L^\infty}) \subset (X, \|\cdot\|_X)$. Zeigen Sie, dass $A \notin L(D(A), X)$.

(Hinweise: Betrachten Sie das Verhalten der Folge $f_n(t) := t^n$ unter A. $D(A)$ erbt hier die $\|\cdot\|_{L^\infty}$ Norm von C^0)

Lösungsskizze: Es gilt

$$\|f_n\|_X = \|f_n\|_{L^\infty} = \sup_{t\in[0,1]} t^n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Weiterhin gilt

$$\|Af_n\|_X = \|f_n'\|_{L^\infty} = \sup_{t\in[0,1]} nt^{n-1} = n \quad \forall n \in \mathbb{N}..$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass Stetigkeit von A äquivalent ist zu

$$\sup_{f \in D(A), \|f\|_X \le 1} \|Af\|_X < \infty.$$

In unserem Fall gilt aber

$$\sup_{f \in D(A), \|f\|_X \le 1} \|Af\|_X \ge \sup_{n \in \mathbb{N}} \|Af_n\|_X = \sup_{n \in \mathbb{N}} n = \infty.$$

Also kann A nicht stetig sein.

(iii) Seien X, A und $D(A)$ wie in (ii). Zeigen Sie: A ist abgeschlossen.

Lösungsskizze:

Seien also $(f_n, g_n) \in \Gamma_A$, d.h. $g_n = f_n'$, und es gelte $f_n \to f$ und $g_n \to g$ in $L^\infty([0,1])$. Damit Γ_A abgeschlossen ist, ist zu zeigen dass $f' = g$.

Sei $x, y \in [0,1]$, $x \neq y$. Da $f_n \in D(A)$ stetig differenzierbar ist, wissen wir aus dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung

$$f_n(y) - f_n(x) = \int_x^y f_n'(t)\, dt = \int_x^y g_n(t)\, dt$$

Da f_n und g_n in L^∞ konvergieren, gilt auch für alle $x, y \in [0,1]$, $x \neq y$.

$$f(y) - f(x) = \int_x^y g(t)\, dt$$

Insbesondere gilt

$$\lim_{y \to x, y \neq x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \lim_{y \to x, y \neq x} \frac{1}{y - x} \int_x^y g(t)\, dt = g(x)$$

Somit ist $f'(x)$ wohldefiniert und es gilt $f'(x) = g(x)$ für alle $x \in [0,1]$. Da g außerdem stetig ist, folgt $f \in C^1([0,1])$ und somit $(f, g) \in \Gamma_A$.

---

*Aufgabe 18

Beweisen Sie Satz 4.16 aus der Vorlesung:

Seien X, Y Banach-Räume und $A : D(A) \subset X \to Y$ eine bijektive, lineare Abbildung. Ist A abgeschlossen, so ist die Inverse von $A : D(A) \to Y$ stetig, d.h. es existiert $B \in L(Y, D(A))$ mit

$$ABy = y \quad \forall y \in Y \quad \text{und} \quad BAx = x \quad \forall x \in D(A).$$

Hinweis: Wenden Sie das Open Mapping Theorem, Satz 4.11(ii), an - vgl. auch den Beweis von Satz 4.14.

Lösungsskizze:

Sei wie im Beweis vom Satz 4.14 $\pi_X : X \times Y \to X$ die Projektion auf X, d.h. $\pi_X(x, y) := x$. Analog sei $\pi_Y : X \times Y$ die Projektion auf Y, d.h $\pi_Y(x, y) := y$. Es gilt $\pi_X \in L(X \times Y, X)$ und $\pi_Y \in L(X \times Y, Y)$.

Der Operator A ist abgeschlossen, also ist $(\Gamma_A, \|\cdot\|_{X \times Y})$ ist als abgeschlossener Unterraum des Banachraums $X \times Y$ selbst ein Bannachraum.

Der Operator A ist bijektiv, also ist $\pi_Y : \Gamma_A \to Y$ bijektiv. Aus dem Open Mapping Theorem folgt, dass die Inverse von π_Y stetig ist, d.h. $\pi_Y^{-1} \in L(Y, \Gamma_A)$.

Nun gilt

$$Ax = y \Leftrightarrow x = \pi_X \circ \pi_Y^{-1}(y)$$

Da $\pi_X \in L(\Gamma_A, Y)$ und $\pi_Y \in L(Y, \Gamma_A)$ ist also auch $B := \pi_X \circ \pi_Y^{-1}$ stetig, $B \in L(Y, D(A))$, und B erfüllt die gewünschten Bedingungen.

Aufgabe 19 Sei X ein Vektorraum versehen mit zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$. Es gelte mit einer Konstanten $C_1 > 0$, dass

$$\|x\|_2 \leq C_1 \|x\|_1 \quad \forall x \in X.$$

(i) Zeigen Sie: Ist X vollständig bezüglich beider Normen, so sind die Normen äquivalent, d.h. es gibt auch eine Konstante $C_2 > 0$ so dass

$$\|x\|_1 \leq C_2 \|x\|_2 \quad \forall x \in X.$$

Hinweis: Nutzen Sie das Open Mapping Theorem.

Lösungsskizze:

Sei $\mathrm{id} : X \to X$ die Identitätsabbildung, $\mathrm{id}(x) := x$. Setzen wir X_1 den Raum $(X, \|\cdot\|_1)$ und X_2 den Raum $(X, \|\cdot\|_2)$ so impliziert

$$\|\mathrm{id}(x)\|_2 = \|x\|_2 \leq C_1 \|x\|_1 \quad \forall x \in X,$$

dass $\mathrm{id} \in L(X_1, X_2)$. Trivialerweise ist id bijektiv. Da X_1, X_2 Banachräume sind folgt aus dem Open Mapping Theorem, dass $\mathrm{id}^{-1} \in L(X_2, X_1)$, d.h.

$$\|\mathrm{id}^{-1}(x)\|_1 \leq C_2 \|x\|_2.$$

Da aber $\mathrm{id}^{-1} x = x$, folgt die Behauptung.

(ii) Überlegen Sie sich ein Beispiel, das zeigt, dass die Bedingung der Vollständigkeit bezüglich beider Normen eine notwendige Bedingung ist. (Hinweis: z.B. ein geeigneter Folgenraum).

Lösungsskizze:

Sei X der Folgenraum $l^1(\mathbb{N})$ und $\|\cdot\|_1 := \|\cdot\|_{l^\infty}$ und $\|\cdot\|_2 := \|\cdot\|_{l^1}$. Dann gilt wegen

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \quad \forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

offensichtlich dass

$$\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \forall x \in X.$$

Der Raum $(l^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1)$ ist aber wie schon gesehen nicht vollständig, und tatsächlich gibt es *kein* $C > 0$ so dass

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \leq C \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| \quad \forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N}). \tag{1}$$

Tatsächlich gilt: Angenommen es gäbe so ein C, das (1) erfüllt. Dann wählt man ein $N \in \mathbb{N}$, $N > C$. Mit diesem N definiere die Folge

$$a_n := \begin{cases} 1 & n \leq N, \\ 0 & n > N. \end{cases}$$

Für diese Folge gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n| = N > C \cdot 1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

Also erhält man einen Widerspruch zu (1).