

Übungen zur  
Funktionalanalysis  
Serie 5 vom 25.03.2015

Für eine kontinuierliche Verbesserung der Vorlesung haben Sie hier die Möglichkeit einer Meinungsabgabe

	1	2	3	4	5
Diese Übung ist zu leicht (1), zu schwierig (5)	<input type="checkbox"/>				
Diese Übung ist langweilig (1), interessant (5)	<input type="checkbox"/>				
Die letzte Vorlesung war unverständlich (1), verständlich (5)	<input type="checkbox"/>				
Die letzte Vorlesung war langweilig (1), interessant (5)	<input type="checkbox"/>				
Kommentare zur Verbesserung:					

---

**Aufgabe 17** Zeigen Sie folgende Aussagen:

- (i) (Beispiel 4.13) Sei  $A \in L(X, Y)$ , also insbesondere  $D(A) = X$ , wobei  $D(A)$  der Definitionsbereich von  $A$  ist. Dann ist  $A$  abgeschlossen.
- (ii) Sei  $(X, \|\cdot\|_X) = (C^0([0, 1]), \|\cdot\|_{L^\infty})$  der Raum der stetigen Funktionen auf  $[0, 1]$  versehen mit der Supremumsnorm  $\|\cdot\|_{L^\infty}$ . Betrachten Sie den linearen Ableitungs-Operator  $A := \frac{d}{dt}$ , d.h.

$$Af := \frac{d}{dt}f,$$

definiert auf dem Unterraum  $D(A) := C^1([0, 1]) \subset X$ . Zeigen Sie, dass  $A \notin L(D(A), X)$ .

- (iii) Seien  $X, A$  und  $D(A)$  wie in (ii). Zeigen Sie  $A$  ist abgeschlossen.
-

**\*Aufgabe 18** Beweisen Sie Satz 4.16 aus der Vorlesung:

Seien  $X, Y$  Banach-Räume und  $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$  eine bijektive, lineare Abbildung. Ist  $A$  abgeschlossen, so ist die Inverse von  $A : D(A) \rightarrow Y$  stetig, d.h. es existiert  $B \in L(Y, D(A))$  mit

$$ABy = y \quad \forall y \in Y \quad \text{und} \quad BAx = x \quad \forall x \in D(A).$$

Hinweis: Wenden Sie das Open Mapping Theorem an

---

**Aufgabe 19** Sei  $X$  ein Vektorraum versehen mit zwei Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$ . Es gelte mit einer Konstanten  $C_1 > 0$ , dass

$$\|x\|_2 \leq C_1 \|x\|_1 \quad \forall x \in X.$$

- (i) Zeigen Sie: Ist  $X$  vollständig bezüglich beider Normen, so sind die Normen äquivalent, d.h. es gibt auch eine Konstante  $C_2 > 0$  so dass

$$\|x\|_1 \leq C_2 \|x\|_2 \quad \forall x \in X.$$

Hinweis: Nutzen Sie das Open Mapping Theorem.

- (ii) Überlegen Sie sich ein Beispiel, das zeigt, dass die Bedingung der Vollständigkeit bezüglich beider Normen eine notwendige Bedingung ist.
-