Universität Basel
Departement Mathematik und Informatik
Dr. Armin Schikorra
Dominik Himmelsbach

Übungen zur
Funktionalanalysis
Serie 6 vom 01.04.2015

Für eine kontinuierliche Verbesserung der Vorlesung haben Sie hier die Möglichkeit einer Meinungsabgabe

	1	2	3	4	5
Diese Übung ist zu leicht (1), zu schwierig (5)	☐	☐	☐	☐	☐
Diese Übung ist langweilig (1), interessant (5)	☐	☐	☐	☐	☐
Die letzte Vorlesung war unverständlich (1), verständlich (5)	☐	☐	☐	☐	☐
Die letzte Vorlesung war langweilig (1), interessant (5)	☐	☐	☐	☐	☐

Kommentare zur Verbesserung:

Aufgabe 20 Zeigen Sie: Seien X, Y lineare Räume, $D(A) \subset X$ ein linearer Unterraum und $A : D(A) \subset X \to Y$ ein linearer, *stetiger* Operator. Dann ist A abschließbar.

Aufgabe 21 Zeigen Sie den Satz über die dominierte Fortsetzung, Korollar 5.3 aus der Vorlesung:

Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Normierter Vektorraum, $U \subset X$ ein linearer Unterraum und $f \in L(U, \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass f fortgesetzt werden kann auf ganz X ohne die Norm von f zu erhöhen. Also: Beweisen Sie die Existenz eines $F \in L(X, \mathbb{R})$ mit

$$F(x) = f(x) \quad \text{für } x \in U$$

und

$$\|F\|_{L(X,\mathbb{R})} = \|f\|_{L(U,\mathbb{R})}$$

Hinweis: Wenden Sie den Satz von Hahn-Banach mit $p(x) = \|x\|_X \; \|f\|_{L(U,\mathbb{R})}$ an.

Aufgabe 22 Zeigen Sie mit dem Satz aus Aufgabe 21 den Satz 5.5 aus der Vorlesung:

Sei X ein normierter Vektorraum, und $X^* = L(X, \mathbb{R})$ der zugehörige Dualraum. Zu jedem $x \in X$ existiert ein $x^* \in X^*$ so dass

$$x^*(x) = \|x\|_X^2 = \|x^*\|_{X^*}^2.$$

Hinweis: Wählen Sie als Unterraum $U := \{y = tx : \; t \in \mathbb{R}\}$ und betrachten Sie das Funktional $f^*(y) := t\|x\|_X^2$ für alle $y = tx \in U$. Wenden Sie nun Korollar 5.3 an.

***Aufgabe 23**

(i) Beweisen Sie mithilfe von Aufgabe 21 den Satz 5.7. aus der Vorlesung:
Sei $U \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum, und $U \neq X$. Gegeben sei außerdem ein $x_0 \notin U$ mit

$$d := \operatorname{dist}(x_0, U) := \inf_{x \in U} \|x - x_0\| > 0.$$

Dann existiert ein $l \in X^* = L(X, \mathbb{R})$ mit $\|l\|_{X^*} = 1$, $l(x_0) = d$ und

$$l(x) = 0 \quad x \in U.$$

(ii) Gilt dieser Satz auch fuer nicht abgeschlossene Unterräume U?