

## Übungen zur Funktionalanalysis Serie 6 vom 01.04.2015

Für eine kontinuierliche Verbesserung der Vorlesung haben Sie hier die Möglichkeit einer Meinungsabgabe

	1	2	3	4	5
Diese Übung ist zu leicht (1), zu schwierig (5)	<input type="checkbox"/>				
Diese Übung ist langweilig (1), interessant (5)	<input type="checkbox"/>				
Die letzte Vorlesung war unverständlich (1), verständlich (5)	<input type="checkbox"/>				
Die letzte Vorlesung war langweilig (1), interessant (5)	<input type="checkbox"/>				
Kommentare zur Verbesserung:					

---

**Aufgabe 20** Zeigen Sie: Seien  $X, Y$  lineare Räume,  $D(A) \subset X$  ein linearer Unterraum und  $A : D(A) \subset X \rightarrow Y$  ein linearer, stetiger Operator. Dann ist  $A$  abschließbar.

---

**Aufgabe 21** Zeigen Sie den Satz über die dominierte Fortsetzung, Korollar 5.3 aus der Vorlesung:

Sei  $(X, \|\cdot\|_X)$  ein normierter Vektorraum,  $U \subset X$  ein linearer Unterraum und  $f \in L(U, \mathbb{R})$ . Zeigen Sie, dass  $f$  fortgesetzt werden kann auf ganz  $X$  ohne die Norm von  $f$  zu erhöhen. Also: Beweisen Sie die Existenz eines  $F \in L(X, \mathbb{R})$  mit

$$F(x) = f(x) \quad \text{für } x \in U$$

und

$$\|F\|_{L(X, \mathbb{R})} = \|f\|_{L(U, \mathbb{R})}$$

*Hinweis:* Satz von Hahn-Banach.

---

**Aufgabe 22** Zeigen Sie mit dem Satz aus Aufgabe 21 den Satz 5.5 aus der Vorlesung:

Sei  $X$  ein normierter Vektorraum, und  $X^* = L(X, \mathbb{R})$  der zugehörige Dualraum. Zu jedem  $x \in X$  existiert ein  $x^* \in X^*$  so dass

$$x^*(x) = \|x\|_X^2 = \|x^*\|_{X^*}^2.$$

---

### \*Aufgabe 23

(i) Beweisen Sie mithilfe von Aufgabe 21 den Satz 5.7. aus der Vorlesung:

Sei  $U \subset X$  ein abgeschlossener Unterraum, und  $U \neq X$ . Gegeben sei außerdem ein  $x_0 \notin U$  mit

$$d := \text{dist}(x_0, U) := \inf_{x \in U} \|x - x_0\| > 0.$$

Dann existiert ein  $l \in X^* = L(X, \mathbb{R})$  mit  $\|l\|_{X^*} = 1$ ,  $l(x_0) = d$  und

$$l(x) = 0 \quad x \in U.$$

(ii) Gilt dieser Satz auch fuer nicht abgeschlossene Unterräume  $U$ ?

---