Universität Basel
Departement Mathematik und Informatik
Dr. Armin Schikorra
Dominik Himmelsbach

Übungen zur Funktionalanalysis Serie 7 vom 08.04.2015

Für eine kontinuierliche Verbesserung der Vorlesung haben Sie hier die Möglichkeit einer Meinungsabgabe

	1	2	3	4	5
Diese Übung ist zu leicht (1), zu schwierig (5)	□	□	□	□	□
Diese Übung ist langweilig (1), interessant (5)	□	□	□	□	□
Die letzte Vorlesung war unverständlich (1), verständlich (5)	□	□	□	□	□
Die letzte Vorlesung war langweilig (1), interessant (5)	□	□	□	□	□

Kommentare zur Verbesserung:

Aufgabe 24

Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein *reeller* normierter Vektorraum. Außerdem sei X ein Prä-Hilbertraum, d.h. es gebe ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf X mit

$$\|x\|_X = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \forall x \in X.$$

Zeigen sie

(i) Es gilt die *Polarisationsformel*

$$4\langle x, y \rangle = \left(\|x+y\|_X^2 - \|x-y\|_X^2 \right) \quad \forall x, y \in X.$$

(ii) Es gilt die *Parallelogramm-Idendität*

$$\|x+y\|_X^2 + \|x-y\|_X^2 = 2\|x\|_X^2 + 2\|y\|_X^2 \quad \forall x, y \in X. \tag{1}$$

(iii) Sei $x \in X$. dann ist die untenstehende Abbildung $x^* : X \to \mathbb{R}$ linear und stetig, d.h. $x^* \in X^*$:

$$x^* : y \in X \mapsto x^*(y) := \langle y, x \rangle.$$

---

*Aufgabe 25

Die Umkehrung von Aufgabe 24 (ii) gilt auch: In jedem *reellen* normierten Vektorraum $(X, \|\cdot\|_X)$, für den die Parallelogramm-Idendität (1) für alle $x, y \in X$ gilt, existiert ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ mit

$$\|x\|_X = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad \forall x \in X.$$

Hinweis: Nehmen Sie die Rechnung in Aufgabe 24(i) als Definition. Bezüglich der Linearität des Skalarproduktes: zeigen Sie zunächst, dass aus der Parallelogramm-Idendität (1) folgt, dass

$$\langle y, x \rangle + \langle z, x \rangle = 2\langle \frac{z+y}{2}, x \rangle. \tag{2}$$

Hierfür ist es hilfreich, sich klarzumachen, dass $y = \frac{y+z}{2} + \frac{y-z}{2}$ und $z = \frac{y+z}{2} - \frac{y-z}{2}$.

Benutzen Sie Induktion und (2) mit $z = 0$ um zu schliessen, dass

$$2^k\langle y, x\rangle = \langle 2^k y, x\rangle \quad \forall k \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

Folgern Sie auch

$$\langle y, x\rangle + \langle z, x\rangle = \langle z + y, x\rangle. \tag{4}$$

sowie

$$\langle my, x\rangle = m\langle y, x\rangle \quad \forall m \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Also insbesondere

$$\langle m2^k y, x\rangle = m2^k\langle y, x\rangle \quad \forall k, m \in \mathbb{Z}.$$

Schließen Sie daraus, dass

$$\langle \lambda y, x\rangle = \lambda\langle y, x\rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 26

(**Projektion in konvexe Mengen**) Sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prä-Hilbertraum. Und $C \subset X$ eine abgeschlossene Menge, die darüber hinaus auch konvex ist, d.h.

$$\lambda c_1 + (1-\lambda)c_2 \in C \quad \forall \lambda \in [0,1],\ c_1, c_2 \in C.$$

Sei $x \in X$, dann ist die Distanz von x zu C definiert als

$$\mathrm{dist}(x, C) := \inf_{c \in C} \|x - c\|_X.$$

Zeigen Sie:

(i) Sei $x \in X$. Es existiert *höchstens ein* $c \in C$ mit

$$\mathrm{dist}(x, C) = \|x - c\|_X.$$

So ein c nennen wir die Projektion von x auf C und schreiben $c = \pi_C(x)$.

Hinweis: Angenommen es gäbe $c_1 \neq c_2 \in C$, die dies erfüllen. Benutzen Sie die *strikte* Konvexität der Norm, also dass

$$\|\lambda a + (1-\lambda)b\|_X^2 < \lambda\|a\|_X^2 + (1-\lambda)\|b\|_X^2 \quad \forall a \neq b \in X, \lambda \in (0,1),$$

und zeigen Sie so:

$$\left\| x - \frac{c_1 + c_2}{2} \right\|_X < \mathrm{dist}(x, C).$$

(ii) Falls $\pi_C(x) \in C$ existiert, also

$$\|\pi_C(x) - x\|_X = \mathrm{dist}(x, C) \leq \|c - x\|_X \quad \forall c \in C,$$

so gilt

$$\langle x - \pi_C(x), c - \pi_C(x)\rangle \leq 0 \quad \forall c \in C$$

Hinweis: Für ein gegebenes $c \in C$ setze

$$f(t) := \|x - (1-t)\pi_C(x) - tc\|_X^2 - \mathrm{dist}(x, C)^2.$$

Zeigen Sie, dass $f(t) \geq 0$ für $t \in [0,1]$ und $f(0) = 0$. Schließen Sie daraus, dass gelten muss, dass $f'(0) \geq 0$. Benutzen Sie die Darstellung der Norm im Skalarprodukt, um $f'(0)$ zu berechnen.

(iii) Falls C ein linearer Unterraum ist, so gilt

$$\langle x - \pi_C(x), c\rangle = 0 \quad \forall c \in C.$$

(iv) Zeigen Sie: Falls X ein Hilbertraum ist, so existiert für jedes $x \in X$ mindestens ein $c \in C$ mit

$$\operatorname{dist}(x, C) = \|x - c\|_X.$$

Hinweis: Sie können wie folgt vorgehen: Wählen Sie eine Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset C$ mit

$$\lim_{k\to\infty} \|x - c_k\|_X \to \operatorname{dist}(x, C).$$

Mit der Parallelogramm-Identität zeigen Sie

$$2\|x - c_k\|_X^2 + 2\|x - c_l\|_X^2 = 4\|x - \frac{c_k + c_l}{2}\|_X^2 + \|c_k - c_l\|_X^2.$$

Schließen Sie daraus, dass

$$4 \operatorname{dist}(x, C)^2 \geq 4 \operatorname{dist}(x, C)^2 + \limsup_{k,l\to\infty} \|c_k - c_l\|_X^2.$$

Folgern Sie, dass $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 27

Sei $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prä-Hilbertraum. Sei $U \subset X$ eine Menge (nicht notwendig ein linearer Raum). Dann setzen wir das orthogonale Komplement $U^\perp$ als

$$U^\perp := \{x \in X : \quad \langle x, u\rangle = 0 \quad \forall u \in U\}$$

Zeigen Sie:

(i) $U^\perp$ ist ein *abgeschlossener* linearer Unterraum von X.

(ii) $U \cap U^\perp \subseteq \{0\}$.

(iii) Sei X ein Hilbertraum und $Y \subset X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum von X. Dann gibt es eine Zerlegung

$$X = Y \oplus Y^\perp,$$

d.h. zu jedem $x \in X$ gibt es *genau ein* $y_1 \in Y$ und ein $y_2 \in Y^\perp$ mit $x = y_1 + y_2$.

Hinweis: Die Existenz folgern Sie aus Aufgabe 26, beachten Sie insbesondere Teil (*iii*). Für die Eindeutigkeit: Falls $y_1 + y_2 = \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2$, zu welchen Raum gehört $y_1 - \tilde{y}_1$ und zu welchem Raum $\tilde{y}_2 - y_2$? Benutzen Sie Teil (ii).
