Universität Basel
Departement Mathematik und Informatik
Dr. Armin Schikorra
Dominik Himmelsbach

# Übungen zur Funktionalanalysis Serie 8 vom 15.04.2015

Für eine kontinuierliche Verbesserung der Vorlesung haben Sie hier die Möglichkeit einer Meinungsabgabe

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Diese Übung ist zu leicht (1), zu schwierig (5) | □ | □ | □ | □ | □ |
| Diese Übung ist langweilig (1), interessant (5) | □ | □ | □ | □ | □ |
| Die letzte Vorlesung war unverständlich (1), verständlich (5) | □ | □ | □ | □ | □ |
| Die letzte Vorlesung war langweilig (1), interessant (5) | □ | □ | □ | □ | □ |

Kommentare zur Verbesserung:

---

**Aufgabe 28** Sei $X = \ell^2(\mathbb{N})$. Zeigen Sie, dass für die Folge $(e_i)_{i=1}^{\infty} \subset \ell^2(\mathbb{N})$ gegeben durch

$$e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-te position}}, 0, \dots)$$

gilt

(i) $\|e_i\|_{\ell^2(\mathbb{N})} = 1$ für alle $i$

(ii) $e_i \xrightarrow{i\to\infty} 0$ *schwach* in $\ell^2(\mathbb{N})$.

*Hinweis:* Benutzen Sie den Darstellungssatz von Riesz.

(iii) Es existiert kein $b \in \ell^2(\mathbb{N})$ so dass $e_i \xrightarrow{i\to\infty} b$ *stark* in $\ell^2(\mathbb{N})$

---

**Aufgabe 29** Sei $X$ ein normierter Vektorraum, und $X^{**} = (X^*)^*$ der zugehörige Bidualraum. Zeigen Sie Satz 6.3 aus der Vorlesung: Die *kanonische Einbettung* $\mathcal{I} : X \to X^{**}$ ist gegeben durch

$$\mathcal{I} : x \mapsto x^{**},$$

wobei

$$x^{**}(l) := l(x) \quad \forall l \in X^*.$$

Zeigen Sie, $\mathcal{I}$ ist eine lineare Isometrie, d.h. $\mathcal{I}$ ist linear und es gilt

$$\|\mathcal{I}x\|_{X^{**}} = \|x\|_X.$$

---

**Aufgabe 30** Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Vektorraum.

(i) (Satz 6.7 (i)) Falls $X$ reflexiv ist, so ist auch $X^*$ reflexiv.

(ii) (Satz 6.9 (ii)) Falls $X$ reflexiv und separabel, dann ist $X^*$ separabel
(*Hinweis*: Verwenden Sie Satz 6.9 (i): Ist $X^*$ separabel, dann ist auch $X$ separabel).

(iii) Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf $X$. Angenommen es gilt für ein $C > 0$

$$C^{-1}\langle x, x\rangle \leq \|x\|_X^2 \leq C\,\langle x, x\rangle \quad \forall x \in X,$$

Dann ist $X$ reflexiv.

---

***Aufgabe 31** Sei $X$ ein normierter Vektorraum. Zeigen Sie Satz 5.15 aus der Vorlesung. Gehen Sie wie folgt vor:

(i) Sei $C \subset X$ konvex und offen mit $0 \in C$, und $x_0 \in X \backslash C$. Zeigen Sie: es existiert ein $l \in X^*$ mit

$$l(c) < l(x_0) \quad \forall c \in C.$$

Dazu gehen Sie wie folgt vor: Das Minkowski-Funktional $p : X \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$p(x) := \inf\{\lambda > 0 : \quad x \in \lambda C\}.$$

Dabei ist

$$\lambda C := \{y \in X : y = \lambda c \quad \text{für ein } c \in C\}$$

a) $p$ ist sublinear.
b) Es existiert ein $R > 0$ so dass $B_R(0) \subset C$, und es gilt dann, dass $p(x) \leq 2R^{-1}\,\|x\|$ für alle $x \in X$.
c) $C = \{x \in X : p(x) < 1\}$, insbesondere gilt $p(x_0) \geq 1$.
d) Setzen Sie $f : \operatorname{span}\{x_0\} \to \mathbb{R}$ als $f(tx_0) := t$, und zeigen Sie, dass $f(x) \leq p(x)$ für alle $x \in \operatorname{span}\{x_0\}$, und $f$ ist linear und stetig auf $\operatorname{span}\{x_0\}$.
e) Setzen Sie $f$ fort auf $X$, d.h. finden Sie $l \in X^*$ so dass $l(c) < 1$ für alle $c \in C$ und $l(x_0) = 1$.

(ii) Schließen Sie aus (i): Sei $A, B \subset X$ konvex, nichtleer, und disjunkt. Falls $A$ offen ist, dann gibt es ein $l \in X^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$l(a) < \lambda \leq l(b) \quad \forall a \in A, b \in B.$$

(iii) Malen Sie ein Bild der Situation von (ii) in $\mathbb{R}^2$: Für zwei disjunkte, konvexe, nichtleere und offene Mengen $A$ und $B$ in $\mathbb{R}^2$ zeichnen Sie $A$ und $B$. Zeichnen Sie für ein geeignetes $l$ und $\lambda$ wie in (ii) die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 : l(x) = \lambda\}$

---