Universität Basel
Departement Mathematik und Informatik
Dr. Armin Schikorra
Dominik Himmelsbach

Übungen zur Funktionalanalysis Serie 9 vom 22.04.2015

Für eine kontinuierliche Verbesserung der Vorlesung haben Sie hier die Möglichkeit einer Meinungsabgabe

	1	2	3	4	5
Diese Übung ist zu leicht (1), zu schwierig (5)	◻	◻	◻	◻	◻
Diese Übung ist langweilig (1), interessant (5)	◻	◻	◻	◻	◻
Die letzte Vorlesung war unverständlich (1), verständlich (5)	◻	◻	◻	◻	◻
Die letzte Vorlesung war langweilig (1), interessant (5)	◻	◻	◻	◻	◻

Kommentare zur Verbesserung:

***Aufgabe 32** Zeigen Sie: $(L^\infty([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$, also der Raum der beschränkten Funktionen auf $[0,1]$ versehen mit der Norm

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$$

ist *nicht* separabel.

Hinweis: Vgl. Beispiel 3.5 aus der Vorlesung, und ggf. Aufgabe 13 von Übungsblatt 4.

Aufgabe 33 Betrachten Sie $X := L^\infty([0,1])$ aus Aufgabe 32. Für $f \in L^\infty([0,1])$, $\varepsilon > 0$, sei

$$T_\varepsilon f := \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon f\,dx.$$

Für eine gegebene Folge $\varepsilon_k \in (0,1)$ mit $\varepsilon_k > \varepsilon_{k+1}$ und $\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$ definieren wir

$$g(x) \equiv g_{(\varepsilon_k)_{k=1}^\infty}(x) := \sum_{i=1}^\infty (-1)^i \chi_{[\varepsilon_{i+1},\varepsilon_i)}, \tag{1}$$

wobei $\chi_{[\varepsilon_{i+1},\varepsilon_i)}$ wie üblich die charakteristische Funktion auf $[\varepsilon_{i+1},\varepsilon_i)$ ist, d.h.

$$\chi_{[\varepsilon_{i+1},\varepsilon_i)} := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [\varepsilon_{i+1},\varepsilon_i), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(i) $T_\varepsilon \in X^*$ mit $\|T_\varepsilon\|_{X^*} \le 1$ für jedes $\varepsilon > 0$

(ii) $g \in L^\infty([0,1])$ mit $\|g\|_{L^\infty} = 1$ für jede Folge $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wie oben.

(iii) Für eine gegebene Folge $\varepsilon_k \in (0,1)$ mit $\varepsilon_k > \varepsilon_{k+1}$ und $\frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$ und g aus (1) gilt:

$$T_{\varepsilon_k} g = (-1)^k \frac{\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} + \frac{1}{\varepsilon_k} \int_0^{\varepsilon_{k+1}} g\, dx,$$

und somit

$$|T_{\varepsilon_k} g - (-1)^k| \leq \frac{2\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_k} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

(iv) Schließen Sie, dass die Folge $(T_{\frac{1}{k}})_{k\in\mathbb{N}} \subset X^*$ *keine* schwach-$*$ konvergente Teilfolge besitzt.

(v) Wieso ist der Satz von Banach-Alaoglu (Satz 6.11 in der Vorlesung) nicht anwendbar?

Aufgabe 34 Zeigen Sie das Variationsprinzip (Satz 6.14 aus der Vorlesung):

Gegeben Sei ein *reflexiver* normierter Vektorraum $(X, \|\cdot\|_X)$ und $M \neq \emptyset$ eine Teilmenge. Sei $F : M \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit den folgenden zwei Bedingungen

- F ist *koerziv* auf M, d.h. für jede Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$ mit $\|x_k\|_X \to \infty$ gilt

$$F(x_k) \to \infty,$$

- F ist *schwach Folgen-unterhalb-stetig/ w.s.l.s.c. - weakly sequentially lower semi-continuous*, d.h. für alle Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$, $x_0 \in M$ mit $x_k \overset{w}{\to} x_0$ schwach in X gilt

$$F(x_0) \leq \lim_{k\to\infty} F(x_k).$$

Falls

$$\inf_{x\in M} F(x) > -\infty,$$

und M schwach Folgen-abgeschlossen ist, d.h. für alle $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset M$, $x_0 \in X$ mit $x_k \overset{w}{\to} x_0$ schwach gilt tatsächlich $x_0 \in M$, dann existiert (mindestens) ein $x_0 \in X$ mit

$$F(x_0) = \inf_{x\in M} F(x).$$

Zeigen Sie dazu:

(i) Es existiert eine Minimalfolge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in M$, d.h. ein Folge x_k mit

$$\lim_{k\to\infty} F(x_k) = \inf_{x\in M} F(x).$$

(ii) Diese Minimalfolge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt. (*Hinweis*: Koerzivität)

(iii) Es existiert eine Teilfolge $(x_{k_i})_{i\in\mathbb{N}}$ und ein $x_0 \in X$ mit $x_{k_i} \overset{w}{\to} x_0$ schwach in X (*Hinweis*: Satz von Eberlein-Smulyan, Satz 6.12)

(iv) Tatsächlich gilt $x_0 \in M$.

(v) Es gilt

$$F(x_0) \leq \inf_{x\in M} F(x).$$

(vi) Tatsächlich gilt $F(x_0) = F(x)$.
