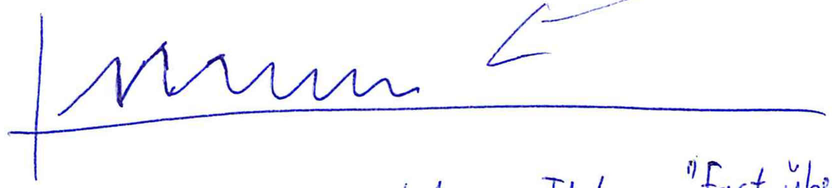
Kapitel 2 (Satz von Baire)

Ein Problem:

Wir wissen Stetigkeit $\not\Rightarrow$ Diffbarkeit z.B.  $f(x) = |x|$

Leichte anschauliche Beispiele: "viele Punkte, an den f stetig aber nicht diffbar ist"



aber: Alle anschaulichen stetigen Fkt: "fast überall diffbar"

was immer das heißen könnte.

Tatsächlich gibt es aber Beispiele von Funktionen $f \in (C^0([0,1]), \|\cdot\|_{C^0([0,1])})$

vollständiger MR $\boxed{\text{ü}}$

die NIRGENDS ~~DICHT~~ DIFFBAR sind.

Die Menge nirgends ~~dichter~~ diffbarer Funktionen ist sogar

dicht in $C^0([0,1])$!

Satz 2.1 (Baire'scher Kategoriensatz / Satz von Baire)

Sei (X,d) vollständig, so gelten die Folgenden Aussagen

(i) Sei $U_j \subset \cancel{X}$ dicht $\forall j \in \mathbb{N}$ & offen ← ["int(U_j) dicht" nicht] $\Rightarrow U := \bigcap_{j=1}^{\infty} U_j$ dicht in X.

⇕

(ii) Sei $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ mit A_j abgeschlossen $\forall j$.

Falls $A^\circ \neq \emptyset \Rightarrow \exists j_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mathring{A}_{j_0} \neq \emptyset$.

Insbes. (iii) Falls $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ mit abgeschlossenen A_j, $j \in \mathbb{N}$,

$\Rightarrow \exists j_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mathring{A}_{j_0} \neq \emptyset$.

Beispiel 2.2.:

- $\mathbb{R} = \bigcup_{x \in \mathbb{R}} \{x\}$ ← abgeschlossen in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ aber $\{x\}^\circ = \emptyset$ ~~nicht offen~~ $\forall x \in \mathbb{R}$

  $X = (\mathbb{R}, |\cdot|)$

  (Moral: $\Rightarrow$ abzählbare Vereinigung in (ii) notwendig)

- $\mathbb{Q} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\}$ ← abgeschlossen in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ aber $\{x\}^\circ = \emptyset$

  $X = (\mathbb{Q}, |\cdot|)$

  (Moral: $\Rightarrow$ Vollständigkeit notwendig in (ii))

- $\mathbb{Q} =: \{q_1, q_2, \dots\}$, $U_i = \mathbb{Q} \setminus \{q_1, \dots, q_i\} \Rightarrow U_i$ dicht in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$

  aber $\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i = \emptyset$. ["offen" in (i) wichtig]

Beweis von Satz 2.1:

(i) Sei $U_j \subseteq X$ offen und dicht $\forall j \in \mathbb{N}$ und

$$U := \bigcap_{j\in\mathbb{N}} U_j .$$

Um zu zeigen, dass U in (X,d) dicht ist, zeigen wir

z.Z.: $\forall x\in X,\ r>0$ gilt stets $\underbrace{B_r(x)}_{=:B} \cap U \neq \emptyset$ $\left(\iff \text{Dichtheit}, \boxed{\text{Ü}}\right)$

Wir konstruieren induktiv $z_j \in X$ und $\rho_j > 0$:

a) $j=1$: $\underbrace{U_1 \cap B}_{\text{offen}} \neq \emptyset$, also $\exists\ z_1,\ \rho_1 \in (0,\frac{1}{2})$ so dass

$$\begin{array}{c} B_{2\rho_1}(z_1) \subseteq U_1 \cap B \\ \cup\!| \\ \overline{B_{\rho_1}(z_1)} \end{array}$$

b) Seien $z_1, \dots, z_{j-1} \in X$, $\varrho_1, \dots, \varrho_{j-1} > 0$ bereits bestimmt.

wieder: $U_j \cap B_{\varrho_{j-1}}(z_{j-1}) \neq \emptyset$ und offen

$\Rightarrow \exists\ \varrho_j > 0,\ z_j \in X$ s.d. $\varrho_j \in (0, 2^{-j})$

$$\overline{B_{\varrho_j}(\cancel{z_j})} \subseteq B_{2\varrho_j}(\cancel{z_j}) \subseteq U_j \cap B_{\varrho_{j-1}}(z_{j-1})$$

• Für diese Folgen z_j, ϱ_j gilt dann:

$$z_j \in B_{\varrho_j}(z_j) \subset U_j \cap B_{\varrho_{j-1}}(z_{j-1}) \subseteq B_{\varrho_{j-2}}(z_{j-2}) \subseteq \dots B_{\varrho_k}(z_k)$$

$\forall\ k \leq j$.

$$\Rightarrow \quad d(z_j, z_k) \leq \varrho_k \leq 2^{-k}. \qquad \forall\ j \geq k.$$

Cauchy-Folge!

X vollständig $\Rightarrow \exists\ \underset{X}{\underset{\Uparrow}{z}} = \lim_{j \to \infty} z_j$.

z ist Kandidat! Für $z \in U \cap B$!

$z \in \overline{B_{\varrho_k}(z_k)}$ abgeschlossen $\overset{\forall k}{\Rightarrow}$ $z \in B_{\varrho_{k-1}}(z_{k-1}) \cap U_{k-1} \subseteq U_{k-1}$ $\forall k$

$\Rightarrow z \in U_k\ \forall k$

<u>Andererseits:</u> $z \in B_{\delta_{n-1}}(z_{n-1}) \subseteq \dots \subseteq B$

$\Rightarrow z \in B \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n .$

$\square$ (i).

(i) $\Leftarrow$ (ii) $\boxed{\ddot{U}}$.

(i), (ii) $\Rightarrow$ (iii) offensichtlich.

$\square$ S.2.1.

<u>Korollar 2.3/Beispiel 2.3</u> (Nirgends diffbare Fkt)

Die Menge der stetigen aber nirgends differenzierbaren Fkt. ist dicht in $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_{C^0})$.

<u>Bew.</u> $\boxed{\ddot{U}}$

Def. 2.4 (Baire Kategorie):

(X,d) MR.

i) $A \subseteq X$ heißt nirgends dicht falls

$$\operatorname{int}(\overline{A}) = \emptyset$$

ii) $A \subseteq X$ heißt mager, von 1. Baire Kategorie, falls

$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ für A_j nirgends dicht.

iii) $A \subseteq X$ heißt fett, von 2. Baire Kategorie falls nicht von 1. Kategorie.

iv) $A \subseteq X$ heißt residuell, falls $X \setminus A$ mager.

Bsp 2.5.

i) $X := \mathbb{Q} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\}$ mager

ii) Jede Teilmenge einer mageren Menge ist mager.

iii) abzählbare Vereinigung magerer Mengen sind mager

$(X = (\mathbb{Q}, |\cdot|)!)$

Satz 2.6. (Baire)

Sei (X, d) vollständig, dann

i) $Kat(X) = 2$

beide Kat 2 möglich.

ii) $Kat(A) = 1 \Rightarrow Kat(A^c) = 2$ und A^c ist dicht in M.

iii) $U \neq \emptyset$ offen $\Rightarrow Kat(U) = 2$.

Bew. ~~i)~~

i) Falls $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \Rightarrow X = \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{A_j}$

$$\overset{S.2.1.(iii)}{\Longrightarrow} \cancel{X} \; \exists j_0 \quad int(\overline{A_{j_0}}) \neq \emptyset.$$

$\Rightarrow A_{j_0}$ nicht nirgends dicht. //

ii) a) Ang. $Kat(A) = 1$, $Kat(A^c) = 1$

$\Rightarrow Kat(A \cup A^c) = 1$ ↯

$\qquad\quad \overset{\shortparallel}{Kat(X)}$

b) $Kat(A) = 1 \Rightarrow A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{A_j}$

nirgends dicht.

$\Rightarrow (\overline{A_j})^c$ offen, und da $int(\overline{A_j}) = \emptyset$

$\Rightarrow (\overline{A_j})^c$ dicht.

~~dicht, abgeschl~~ dicht, offen

$$\Rightarrow A^c = \left(\bigcup^{\infty} A_j\right)^c \supseteq \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \overline{A_j}\right)^c = \bigcap_{j=1}^{\infty} \overline{A_j}^c$$

iii) Wäre $\mathrm{Kat}(U) = 1$

$\underset{ii)}{\Longrightarrow}$ $\mathrm{Kat}(U^c) = 2$ und U^c dicht

$\Rightarrow$ ~~tt~~ $\underset{U^c \text{ abgeschlossen}}{\Longrightarrow}$ $U^c = X$ $\Rightarrow$ $U = \emptyset$.

<u>MORAL:</u> Typische Beispiele fetter Mengen: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

magerer $\mathbb{Q}$.

Anwendung

Satz 2.7 (PRINZIP DER GLEICHMÄẞIGEN BESCHRÄNKTHEIT)

Sei (X,d) vollständig und

$(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie stetiger Fkt $f_\lambda : X \to \mathbb{R}$.

Sei $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ punktweise beschränkt, d.h.

$$\forall x \in \cancel{X}: \quad \sup_{\lambda\in\Lambda} |f_\lambda(x)| < \infty. \quad (*)$$

Dann $\exists$ eine offene Kugel $B \subset X$ mit

$$\sup_{\lambda\in\Lambda,\, x\in B} |f_\lambda(x)| < \infty, \quad \text{d.h.}$$

$(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ist gleichmäßig beschränkt auf B.

Beweis:

$$A_k := \{x \in X : |f_\lambda(x)| \le k \ \forall \lambda \in \Lambda\}$$

$$\cancel{= \bigcap_{\lambda\in\Lambda} \{x : |f_\lambda(x)| \le k\}}$$

~~abgeschlossen, da f_λ stetig~~

abgeschlossen!

Es gilt $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \overset{(\#)}{=} X.$

Baire S. 2.1. (iii) $\Rightarrow$ $\exists_{k_0}\, k_0\in\mathbb{N}$ s.d. $(A_{k_0})^\circ \neq \emptyset.$

d.h. $\exists$ B offen $\subseteq A_{k_0}$ $\square$