Kapitel 3

In den Grundvorlesungen haben wir

$\mathbb{Q}$ definiert, und dann nach $\mathbb{R}$ vervollständigt.

Ziel: Fortsetzung auf abstrakte MR.

Definition 3.1 (Isometrie)

Seien (X,d_X), (Y,d_Y) metrische Räume und

$\Phi: X \to Y$.

Φ heißt Isometrie $:\Leftrightarrow$ $d_Y(\Phi(x), \Phi(y)) = d_X(x,y) \quad \forall x,y \in X$.

Unser Ziel ist zu zeigen, dass jeder MR M in einen vollständigen MR "eingebettet" werden kann:

Satz 3.2 (Vervollständigung MR)

Sei (X, d_X) ein MR. Es existiert (Y, d_Y) ein vollständiger MR,
und eine Isometrie $\Phi : X \to Y$.

Der Abschluss $\overline{\Phi(X)}^{d_Y} \subseteq Y$

↳ heißt Abschluss/ Vervollständigung von X in Y.

manchmal $\overline{X}^{d_Y}$

⌜ $\overline{X}^{d_Y}$ ist eindeutig bis auf isometrien ⌟

Dazu betrachten wir den Vektorraum von beschränkten Funktionen

Bsp. 3.3

Sei M Menge und $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter VR.

i) Dann ist $B(M, X) = \{ f : M \to X, \sup_{p \in M} \|f(p)\|_X < \infty \}$

↳ beschränkte Fkt.

ein normiert VR mit

$$\|f\|_{B(M,X)} := \sup_{p \in M} \|f(p)\|_X .$$

ii) $B(M,X)$ vollständig $\Leftarrow$ X vollständig.

Beweis i) $\cancel{f(p)+}$

$$(f+g)(p) := f(p) + g(p)$$

$$(\lambda f)(p) := \lambda f(p).$$

$\rightsquigarrow$ $B(M,X)$ ist VR.

$\|\cdot\|_{B(M,X)}$ erfüllt NORM-AXIOME, insbesondere Dreiecksungleichg

$$\begin{aligned}\|f+g\|_{B(M,X)} &= \sup_{p\in M} \|f(p)+g(p)\|_{\cancel{B(M,X)}\,X} \\ &\le \sup_{p\in M} \left(\|f(p)\|_{\cancel{B(M,X)}\,X} + \|g(p)\|_X\right) \\ &\le \sup_{p\in M} \|f(p)\|_X + \sup_{p\in M} \|g(p)\|_X .\end{aligned}$$

ii) vgl. $\boxed{\text{Ü}}$.

Beweis von Satz 3.2.

vollständig, s.o.!

Sei $Y := B(X,\mathbb{R})$.

mit ~~Metrik~~ d_Y (induzierte Metrik $\|\cdot\|_{B(X,\mathbb{R})}$).

Fixiere $x^* \in X$, und setze

$$\Phi : X \to Y, \qquad \Phi(x) := \big(z \mapsto d(x,z) - d(x^*,z)\big)$$

Funktion in z!

Es gilt $\Phi(x) \in B(X,\mathbb{R})$, da

$$\sup_z |\Phi(x)(z)| = \sup_z |d(x,z) - d(x^*,z)| \le d(x,x^*).$$

$$\Rightarrow \quad \|\Phi(x)\|_{B(X,\mathbb{R})} \le d(x,x^*).$$

Außerdem:

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_{B(X,\mathbb{R})} = \sup_{z\in X} |\Phi(x)(z) - \Phi(y)(z)|$$

$$= \sup_{z\in X} \big| d(x,z) - \cancel{d(x^*,z)} - (d(y,z) - \cancel{d(x^*,z)})\big|$$

$$\le \sup_{z\in X} d(x,y) = d(x,y)$$

und

$$\|\Phi(x) - \Phi(y)\|_{B(X,\mathbb{R})} = \sup_{z\in X} |\Phi(x)(z) - \Phi(y)(z)|$$

$$\underset{z:=x}{\ge} |\Phi(x)(x) - \Phi(y)(x)| = d(y,x).$$

$$\Rightarrow \quad \|\Phi(x) - \Phi(y)\|_{B(X,\mathbb{R})} = d(x,y) \quad \Rightarrow \quad \Phi \text{ Isometrie} \quad \square$$

Separable Räume:

Wir haben gesehen:

Jeder Metrische Raum ist isometrisch! eingebettet in $B(X)$ ← beschränkten Fkt.

Tatsächlich ist eine große Klasse von MR isometrisch eingebettet in $\ell^\infty(\mathbb{N})$ (Kuratowski - Einbettung)

Def 3.4. (Separable MR)

Ein MR (X,d) heißt separabel falls $\exists$ abzählbares $A \subseteq X$ mit A dicht in X.

Bsp. 3.5.

~~Sei~~ $\ell^p(\mathbb{N})$ ~~gegeben~~, ist separabel für $p \in [1,\infty)$

Bew.:

Sei $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \ : \ \lambda_j \in \mathbb{Q} \right\}$, abzählbar!

wobei $e_j = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ ← j.-te Stelle.

Für $x = (x_i)_{i=1}^\infty \in \ell^p$, $\varepsilon > 0$, gilt $(p < \infty!)$

$\exists N = N(x,\varepsilon)$ s.d. $\left(\sum_{i=N+1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}$

Wähle $(\lambda_j)_{j=1}^{N} \subseteq \mathbb{Q}^N$ s.d.

$$|\lambda_j - x_j| < \frac{\varepsilon}{2N} \qquad \forall j = 1, \dots, N$$

Dann gilt: $a := \sum_{j=1}^{N} \lambda_j e_j \in A$ und

$$\|x - a\|_{\ell^p} = \Bigg(\underbrace{\sum_{j=1}^{N} |\lambda_j - x_j|^p}_{\substack{< N \left(\frac{\varepsilon}{2N}\right)^p \\ \le \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p}} + \underbrace{\sum_{j=N+1}^{\infty} |x_j|^p}_{< \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p} \Bigg)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le \left(2 \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \varepsilon \qquad //$$

$\ell^\infty(\mathbb{N})$ ist nicht separabel.

Tatsächlich $\exists\ B \subseteq \ell^\infty(\mathbb{N})$ s.d.

$d_{\ell^\infty}(b_i, b_j) = 1 \quad \forall\, i \neq j$. und B überabzählbar

$$B = \{ \chi_C \ ,\ C \subseteq 2^{\mathbb{N}} \}$$

– überabzählbar.

$$(\chi_C)^i = \begin{cases} 1 & i \in C \\ 0 & i \notin C \end{cases}$$

Proposition 3.6.

Falls (X,d) eine diskrete, überabzählbare Teilmenge A enthält, so ist X nicht separabel.

Bew. $\boxed{\text{Ü}}$

Satz 3.7 (Kuratowski - Einbettung)

Jeder separable MR (X,d) kann isometrisch in $\ell^\infty(\mathbb{N})$ eingebettet werden, es ex. also $\Phi: X \to \ell^\infty(\mathbb{N})$ isometrisch.

Beweis:

ähnlich wie Satz 3.?, nur wähle $A \subseteq X$ abzählbar mit $\overline{A} = X$, $A = \{a_1, a_2, \dots\}$.

Fixiere $x^* \in X$.

$$\Phi(x) := \left(d(x, a_1) - d(a_1, x^*),\ d(x, a_2) - d(a_2, x^*), \dots \right)$$

Abschätzungen zu erhalten.

//