§5. Lineare Funktionen, Dualraum:

X : $\mathbb{R}$-VR (viele ~~ge~~ Aussagen lassen sich geeignet fortsetzen auf $\mathbb{C}$)

!

$f: X \longrightarrow \mathbb{R}$ ist Funktion.

Def. 5.1 (sublinear)

$p: X \to \mathbb{R}$ heißt sublinear, falls

i) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ $\quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$, $x \in X$ $\quad \alpha \geq 0$

ii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ $\quad \forall x, y \in X$.

z. Bsp: Jede Norm ist sublinear.

5.2 Satz von Hahn-Banach

$U \subseteq X$ linearer TR, $p: X \to \mathbb{R}$ sublinear,

$f: U \to \mathbb{R}$ linear mit

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in U$$

Dann $\exists$ lineare Abb. $F: X \to \mathbb{R}$ mit $F|_U = f$ und

$$F(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X.$$

Korollar 5.3 (Dominierte FORTSETZUNG)

Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ NVR, $U \subseteq X$ ein linearer UR, $f \in L(U, \mathbb{R})$.

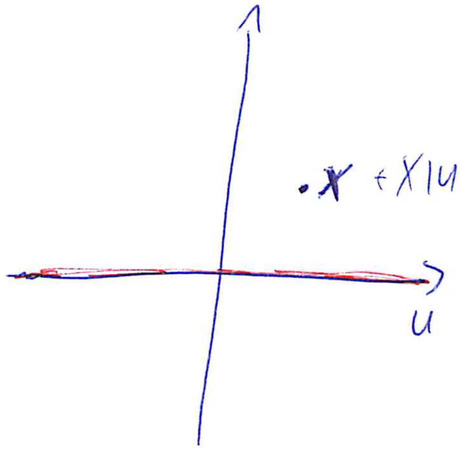
Dann $\exists F \in L(X, \mathbb{R})$ mit $F|_U = f$ und

$$\|F\|_{L(X,\mathbb{R})} = \|f\|_{L(U,\mathbb{R})}.$$

Beweis K.5.3 $\boxed{\text{Ü}}$

Beweis S. 5.2.

- $U = X \Rightarrow$ fertig $F := f$.
- $U \subsetneq X$. Schritt 1 Sei $x_1 \in X \setminus U$



$$U_1 := \{ x + t x_1 \, , \; x \in U, \; t \in \mathbb{R} \}$$

Wir setzen f auf $f_1 : U_1 \to \mathbb{R}$ fort:

$$\cancel{f_1(x+tx_1)} : f_1(y) := f_1(\underbrace{x + t x_1}_{\text{l.u.}}) := f(x) + t\alpha \qquad x \in U, t \in \mathbb{R}$$

$y = x + tx_1$, $y \in U_1$ — α zu wählen

$\Rightarrow$ f_1 linear ✓ , $f_1(y) = f(y) \quad \forall y \in U$ $(\Rightarrow t=0$, $y = x)$

Wähle α so dass

$$f_1(y) \le p(y) \qquad \forall y \in U_1.$$
$$\|$$
$$f(x) + t\alpha \le p(x + t x_1) \qquad \forall x \in U, t \in \mathbb{R}$$

insbesondere $\alpha = 0$ geht nicht i.A.

Wähle $\alpha := \sup\limits_{x \in U} \left(f(x) - p(x - x_1) \right)$.

1. $\alpha < \infty$:

$\forall x \in U$:
$$f(x) - p(x - x_1) \le p(x) - p(x - x_1) \overset{\text{sublin.}}{\le} p(x_1) < \infty.$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \le p(x_1).$$

2. $\underline{f_1(x + x_1)} = f(x) + \alpha$

$$f(x) - p(x - x_1) \le p(y + x_1) - f(y) \quad \forall x, y \in U$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x+y) \le p(y + x_1) + p(x - x_1)$$

$$\Uparrow$$

$$f(x+y) = f(x - x_1) + f(y + x_1) \le p(x - x_1) + p(y + x_1)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha \le p(y + x_1) - f(y) \quad \forall y \in U.$$

$\boxed{NR}$

sup $x \in U$

$$\underset{y=x}{\le} f(x) + p(x + x_1) - f(x) = \underline{p(x + x_1)}$$

$\underline{f_1(x - x_1)} = f(x) - \alpha$

$$\overset{\boxed{NR}}{\le} f(x) - \sup_{y \in U} \left(f(y) - p(y - x_1) \right)$$

$$\underset{y \to x}{\le} f(x) - f(x) + p(x - x_1) = \underline{p(x - x_1)}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \pm \alpha \leq p(x \pm x_1) \quad \forall x \in U$$

$$\Rightarrow t \in \mathbb{R}: \quad f\left(\frac{x}{t}\right) \pm \alpha \leq p\left(\frac{x}{t} \pm x_1\right) \quad \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x \in U$$

$$\Rightarrow t > 0 \quad f(x) \pm t\alpha \underset{\substack{t>0 \\ p \text{ sublinear}}}{\leq} p(x \pm t x_1)$$

$$\|$$

$$\Rightarrow \quad f_1(y) \leq p(y) \quad \forall y \in U_1.$$

$\Rightarrow$ Wir können f auf Fortsetzen auf Raum mit Dimension +1

$\Rightarrow$ Induktion: Wir können f Fortsetzen auf Raum mit Dimension $+k$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

<u>PROBLEM</u>: Räume mit ∞-dim!

↳ TRANSFINITE INDUKTION

Lemma von ZORN (⟺ Auswahlaxiom)

Sei $P \neq \emptyset$ eine Menge mit $\boxed{\text{partieller}}$ ORDNUNG $\leq$,

[d.h. ~~Falls~~ $\forall x, y, z \in P$ gilt

- $x \leq x$ (Reflexiv)
- $x \leq y \wedge x \geq y \Rightarrow x = y$ (Anti-symmetrie)
- $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (transitivität)]

$\boxed{\text{partiell}}$, da aber i.A. $\exists\, x, y \in P$ mit $x \nleq y$ und $y \nleq x$

Falls jede $\boxed{\text{total}}$ geordnete Teilmenge $\tilde{P} \subseteq P$ (d.h. $\boxed{\text{total}}$: $\forall x, y \in \tilde{P}$ gilt ~~entweder~~ $x \leq y$, oder $y \leq x$ oder beides)

eine obere Schranke, d.h. $\exists\, \tilde{p} \in P$ mit $\tilde{p} \geq p \; \forall p \in \tilde{P}$,

dann besitzt P ein maximales Element (d.h. $\exists\, \bar{p} \in P$ s.d. $\bar{p} \leq p_2 \Rightarrow p_2 = \bar{p}$

Weiter: Beweis zu S. 5.2.

Sei $P = \{ (V, g) \;,\; V \subseteq X$ linearer UR, g linear
$g|_U = f$
$g(x) \leq p(x) \quad \forall x \in V. \}$

$(V_1, g_1) \leq (V_2, g_2) \;:\Leftrightarrow\; V_1 \subseteq V_2$ und $g_2|_{V_1} = g_1$

partielle Ordnung!

$P \supseteq \{ (U, f) \} \Rightarrow P \neq \emptyset.$

Sei nun $\tilde{P} \subseteq P$ total geordnet.

$$\overline{V} := \bigcup_{(V,g) \in \tilde{P}} V .$$

Da ~~W~~ $\tilde{P}$ total geordnet $\Rightarrow \overline{V}$ ist lin. UR.

$\bar{g}(x) := g(x)$ Für $x \in V$, $(V, g) \in \tilde{P}$.

$\leftarrow$ eindeutig definiert, da $\tilde{P}$ total geordnet.

$\bar{g}(x) \leq p(x). \quad \forall x \in \overline{V}.$

$\Rightarrow (\overline{V}, \bar{g}) \in P, \quad (\overline{V}, \bar{g}) \geq (V, g) \quad \forall (V, g) \in \tilde{P}.$

Lemma Zorn
$\Rightarrow$

$\exists$ maximales Element

$(\tilde{U}, \tilde{F})$, insb. so dass $\tilde{F}|_U = f$

$\tilde{U} \supset U.$

$\tilde{F}(x) \leq p(x). \quad \forall x \in \tilde{U}$

noch z. z. $\tilde{U} = X.$

Angenommen $\tilde{U} \subsetneq X \Rightarrow$ Konstruktion oben: $x_1 \in X \setminus \tilde{U}.$

$\exists \;\bar{F} : \operatorname{span}(\tilde{U}, x_1) \longrightarrow \mathbb{R}$ linear, $\bar{F}(x) \leq p(x)$

und $\bar{F}|_{\tilde{U}} = \tilde{F}|_{\tilde{U}}.$

$\Rightarrow \quad (\bar{F}, \bar{U}) \geq (\tilde{F}, \tilde{U})$ in P

$(\tilde{F}, \tilde{U})$ maximale El.
$\Rightarrow$
$(\bar{F}, \bar{U}) = (\tilde{F}, \tilde{U}) \Rightarrow \bar{U} = \tilde{U}$ ↯ also $\tilde{U} = X.$

$\square$

5.2 Dualraum:

$(X, \|\cdot\|_X)$ ein ~~lint~~ NVR.

Def. 5.4. (Dualram)

$$X^* \equiv L(X, \mathbb{R})$$ (Ram der stetigen, linearen Funktionale)

heißt Dualraum ~~auf~~ von X.

beachte: Da $\mathbb{R}$ BR $\Rightarrow$ $(X^*, \|\cdot\|_{X^*})$ BR.

Für $x^* \in X^*$ schreiben wir

$$x^*(x) = \langle x^*, x \rangle_{X^* \times X}$$ $(\rightsquigarrow \langle h, g \rangle_{H^{-1} \times H})$ L^2

Satz 5.5

$\forall x \in X \quad \exists\, x^* \in X^*$ mit

$$\|x\|_X^2 = \|x^*\|_{X^*}^2 = x^*(x)$$

$\boxed{\text{Bew Ü:}}$

Satz 5.6

i) $\|x\|_X = \sup\limits_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\| \leq 1}} |\langle x^*, x\rangle|, \quad \forall x \in X$

ii) $\|x^*\|_{X^*} = \sup\limits_{\substack{x \in X \\ \|x\| \leq 1}} |\langle x^*, x\rangle|, \quad \forall x^* \in X^*$ ← Def. der Norm!

Beweis (i) $x = 0$ ✓

~~$\|x\|_X = 1$ (Homogenität)~~

$$|x^*(x)| \leq \left|x^*\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right| \|x\|_X \leq \|x^*\|_{X^*} \|x\|_X$$

$$\Rightarrow \lambda := \sup_{\substack{x^* \in X^* \\ \|x^*\|_{X^*} \leq 1}} |x^*(x)| \leq \|x\|_X .$$

Sei nun x^* aus Satz 5.5 für x gegeben.

$$\left\|\frac{x^*}{\|x\|_X}\right\|_{X^*} \overset{5.5.5}{=} 1 \Rightarrow \lambda \geq \left|\left(\frac{x^*}{\|x\|_X}\right)(x)\right| = \frac{\|x\|_X^2}{\|x\|_X} = \|x\|_X \Rightarrow \lambda = \|x\|$$

$\square$

Satz 5.6. (TRENNUNGSSATZ)

$x, y \in X$ $\Rightarrow$ $\exists\, l \in X^*$ mit $l(x) \neq l(y)$
$x \neq y$

Bew: $y - x \neq 0$ $\Rightarrow$ $\exists\, l$ mit $l(x-y) = \|x-y\|_X^2 > 0$

$\Rightarrow$ $l(x) - l(y) > 0.$

Satz 5.7. $U \subseteq X$ abgeschlossener UR, $U \neq X$

$x_0 \notin U$ mit $d := \mathrm{dist}(x_0, U) = \inf\limits_{x \in U} \|x - x_0\| > 0$

$\Rightarrow$ $\exists\, l \in X^*$ mit $l|_U \equiv 0$ und

$\|l\|_{X^*} = 1$, $l(x_0) = d$

$\rightsquigarrow$ Nächstes Mal: Hilbert-Raum!