5.3 Dualität im Hilbertraum

$(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ HR

Für $y \in H$ ist

$j_y(x): x \longmapsto \langle y, x \rangle$ eine lineare, stetige Abb.

$j_y \in H^*$

$$\boxed{\begin{aligned} J: H &\longrightarrow H^* \\ y &\longmapsto j_y \end{aligned}}$$

Satz 5.8 J ist $\underset{\text{lineare}}{\wedge}$ Isometrie: $H \to H^*$

Bew:

J linear ✓

$$\|Jy\|_{H^*} = \|j_y\|_{H^*} = \sup_{\|x\|_H \le 1} |\langle y, x \rangle| \begin{cases} \overset{\text{C.S.}}{\le} \sup\limits_{\|x\| \le 1} \|y\| \, \|x\| = \|y\| \\ \overset{x := \frac{y}{\|y\|}}{\ge} \left|\langle y, \frac{y}{\|y\|} \rangle\right| = \|y\|_H \end{cases}$$

$$= \|y\|_H$$

J ist sogar isometrischer Isomorphismus:

Satz 5.9 (Riesz'scher Darstellungssatz)

H HR.
$\forall\, \ell \in H^* \quad \exists\, y \in H$ mit

$$< y, x >_H = \ell(y).$$

Beweis: OE $\|\ell\|_{H^*} = 1$ $\quad \left(\begin{array}{ll} \|\ell\| = 0 & \text{trivial} \\ \|\ell\| > 0 & \rightsquigarrow \text{Homogenität} \end{array} \right)$

$$\|\ell\|_{H^*} = \sup_{\|y\|_H \leq 1} |\ell(y)|$$

Sei also $y_k \in H$, $\|y_n\| = 1$ mit

$$|\ell(y_k)| \longrightarrow \|\ell\|_{H^*} = 1.$$

Schritt 1: $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist C.F.

ℓ beschränkt!

$$1 \xleftarrow[k,l \to \infty]{} \ell\left(\frac{y_k + y_l}{2}\right) \leq \underbrace{\|\ell\|_{H^*}}_{=1} \left\| \frac{y_k + y_l}{2} \right\|_H \qquad (*)$$

Nun gilt Parallelogramm-Identität $\boxed{\text{Ü}}$:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 .$$

$$\overset{x=y_k,\ y=y_l}{\Rightarrow} \quad \|y_k + y_l\|^2 + \|y_k - y_l\|^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad \left\| \frac{y_k + y_l}{2} \right\|^2 = 1 - \frac{1}{4}\|y_k - y_l\|^2$$

In ⊛

$$\ell\left(\frac{y_k + y_l}{2}\right) \leq \sqrt{1 - \frac{1}{4}\|y_k - y_l\|^2}$$

$$\downarrow k,l \text{ groß}$$

$$1$$

$$\Rightarrow \quad \|y_k - y_l\| \longrightarrow 0 \quad \text{für } k,l \text{ groß}$$

$$\Rightarrow \quad (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ ist } \underline{\text{C.F.}}$$

$$\Rightarrow \quad \exists\, y \in H \text{ mit } y_k \longrightarrow y$$

Kandidat.

und wegen Stetigkeit der Norm

$$\|y\|_H = 1$$

Schnitt 2: $\ell = j_y$

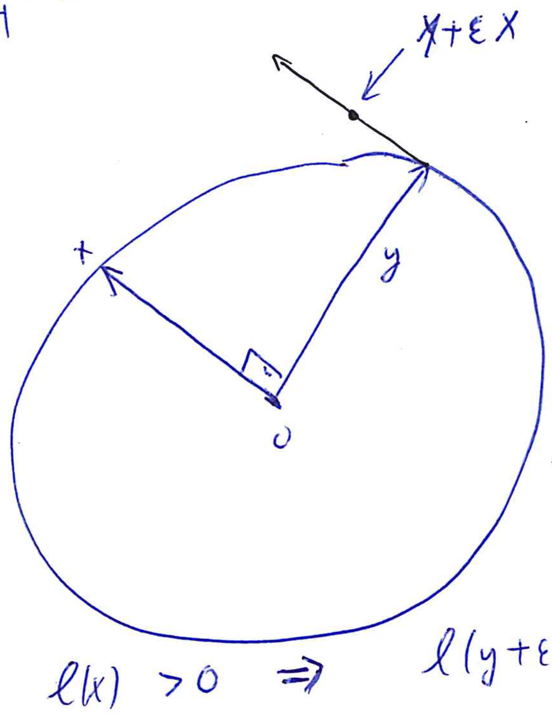
$\boxed{\ell(x) = \langle x, y \rangle}$?

Es gilt $\ell(y) = \lim_{n \to \infty} \ell(y_n) = \|\ell\|_{H'} = 1 = \langle y, y \rangle = \ell_y$

ℓ stetig

Sei nun $x \in \cancel{H}\ y^{\perp} = \{ x \in H, \underbrace{\langle x, y \rangle = 0}_{x \perp y} \}$

& $\|x\|_H = 1$.



$y \perp x$

Falls ~~y+~~ $\ell(x) > 0 \Rightarrow \ell(y + \varepsilon x) = 1 + \varepsilon \ell(x)$.

wächst ~~mit~~ wie "ε"

$\|y + \varepsilon x\|_X = \sqrt{1 + \varepsilon^2}$

$\Rightarrow \ell\left(\frac{y + \varepsilon x}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \right) = \frac{1 + \varepsilon \ell(x)}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}} > 1$ für $\varepsilon \ll 1$

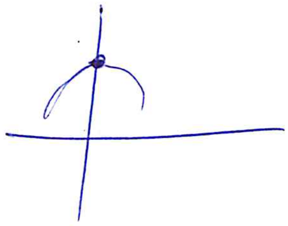
läuft wie $\boxed{1+\varepsilon^2}$

aber $\|\ell\|_H = 1$ ↯

<u>Genauer gilt:</u>

$$f(\varepsilon) := \ell\left(\frac{y+\varepsilon x}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\right) \le 1 \qquad \forall\, \varepsilon > 0 \qquad \text{da } \|\ell\|_{H^*} = 1$$

$f(0) = 1 \Rightarrow$ lokales Max in $\varepsilon = 0$



falls f diffbar

$\Rightarrow \quad f'(0) \le 0$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} \left(\ell(y) + \varepsilon\, \ell(x)\right) = \ell(x)$$

$\Rightarrow \quad \ell(x) = 0 \qquad \forall\, x \perp y, \quad \|x\| = 1$

Linearität $\Rightarrow \quad \ell(x) = 0 \qquad \forall\, x \in H$ mit $\langle x, y\rangle = 0$

Sei nun $x \in H$. Da H HR $\exists$ eindeutige Darstellung

$\boxed{\ddot{U}}$ $\quad x = y_1 + y_2$ mit $y_2 \perp y_1$

$y_1 \parallel y \Rightarrow y_1 = \lambda y$

$$\Rightarrow \underline{\ell(x)} = \ell(y_1) = \lambda\, \ell(y) = \lambda \langle y, y\rangle = \langle y_1, y\rangle \overset{y_2 \perp y}{=} \langle y_1 + y_2, y\rangle = \langle x, y\rangle. \quad \square$$

In diesem Sinne gilt

$$\left(L^2(\Omega)\right)^* \cong L^2(\Omega).$$

Für Banach-Räume ist dies nicht wahr, aber:

<u>Satz 5.10</u> (Riesz-sche Darstellungssatz) $\quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$

- Sei $g \in L^q(\Omega)$, dann ist

$$f \mapsto l_g(f) := \int_\Omega f\, g \qquad \text{linear in } f$$

und $l_g \in \left(L^p(\Omega)\right)^*$

- Es gilt $\forall\, l \in \left(L^p(\Omega)\right)^* \ \exists\, g \in L^q(\Omega)$ mit

$$l(f) = \int_\Omega f\, g.$$

- $\left(L^p(\Omega)\right)^*$ ist ~~also~~ isometrisch isomorph zu $L^q(\Omega)$.

5.4 Schwache Konvergenz!

Def. 5.11 $(X, \|\cdot\|_X)$ NVR, X^* sein Dualraum.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen x, $x_n \rightharpoonup x$,

falls $\forall\, \ell \in X^*$ gilt

$$\ell(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \ell(x).$$

Bsp. 5.12 • Falls $x_n \longrightarrow x$ in $X \Rightarrow \ell(x_n) \longrightarrow \ell(x)$

$\forall\, \ell \in X^*$ wegen Stetigkeit.

• $X = \ell^2(\mathbb{N})$, $e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$

$\uparrow$ i-te Position.

Dann gilt $\|e_i\|_{\ell^2} = 1 \;\forall i$, aber:

$e_i \longrightarrow 0$ schwach in ℓ^2!

Der schwache Limes ist eindeutig:

Falls $y_n \longrightarrow y$ schwach in X

$y_n \longrightarrow \tilde{y}$ — " —

dann wähle l aus Satz 5.6 s.d.

$$l(y) \neq l(\tilde{y}).$$

Wegen

$$\begin{tikzcd} l(y_n) \arrow[r] \arrow[d] & l(y) \\ l(\tilde{y}) & \end{tikzcd}$$

gilt $l(\tilde{y}) = l(y) \Rightarrow$ ↯ $l(y) \neq l(\tilde{y})$.

<u>Satz 5.13:</u>

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, $x_n \longrightarrow x$ <u>schwach</u> in X

Dann ist $(x_n)_n$ beschränkt, Außerdem

$$\|x\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_X$$

Beweis:

① $A_n \in L(X^*, \mathbb{R})$ definiert als

$$A_n(\ell) := \ell(x_n)$$

sind punktweise beschränkt, X^* ist BR

Satz 4.8. $\Rightarrow$ A_n ist gleichmäßig beschränkt!

Uniform boundedness Principle

$$\|x_n\|_X \overset{5.5.6.}{=} \sup_{\substack{\ell \in X^* \\ \|\ell\| \leq 1}} |\langle x_n, \ell^* \rangle|$$

$$= \sup_{\substack{\ell \in X^* \\ \|\ell\| \leq 1}} \|A_n(\ell)\| = \|A_n\|_{L(X^*, \mathbb{R})}$$

$$\Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|_X \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| < \infty \quad //$$

② Wähle $\ell \in X^*$ mit

$\|\ell\|_{X^*} = 1$, $\ell(x) = \|x\|_X$. (Hahn-Banach)

$$\Rightarrow \quad \|x\|_X = \ell(x) = \lim_{n \to \infty} \ell(x_n) \leq \liminf_{n \to \infty} \underbrace{\|\ell\|_*}_{=1} \|x_n\|_X$$

□

Im allgemeinen folgt

$$\begin{array}{l} x_n \longrightarrow x \quad \text{schwach} \\ \cap \\ \Omega \end{array}$$

nicht dass ~~$x_n \to$~~ $x \in \overline{\Omega}$ (z.B. $x_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \{ \|x\|_{\ell^2} = 1 \}$)

Konvexität hilft:

Satz 5.14

Sei Ω konvex + abgeschlossen

und $x_n \longrightarrow x$ schwach für $x_k \in \Omega \; \forall k \in \mathbb{N}$

Dann gilt $x \in \Omega$.

Beweis: Der Beweis benötigt

Satz 5.15 (TRENNUNGSSATZ)

$A, B \subset X$ konvex + nicht leer

Falls A offen $\exists\ \ell \in X^*$, $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$\ell(a) < \lambda \leq \ell(b) \quad \forall a \in A, b \in B$$

[ohne Beweis]

Bew. S. 5.14:

$x_n \xrightarrow{\text{schwach}} x$. Angenommen $x \notin \Omega$.

$\cap$

Ω

$\Rightarrow x_n \not\to x$ stark (da Ω abgeschlossen)

$\Rightarrow \exists\ \varepsilon > 0 \quad x_n \notin B_\varepsilon(x)$.

ε klein, so dass $B_\varepsilon(x) \cap \Omega = \emptyset$

~~in Satz 5.15~~: Wähle in S. 5.15

$$A := B_\varepsilon(x), \quad B := \Omega.$$

$\Rightarrow \exists\ \ell \in X^*$:

$$\ell(a) < \lambda \leq \ell(b) \quad \forall b \in B, a \in A$$

$$\ell(x) < \lambda \leq \ell(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \ell(x_n) \not\to \ell(x)$$

$\square$