Universität Freiburg
Mathematisches Institut
PD. Dr. Armin Schikorra
M.Sc. Frank Rösler

Übungen zur Vorlesung Partielle Differentialgleichungen Serie 1 vom 18.10.2016

Aufgabe 1 Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei die Fouriertransform $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert als

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \xi, x\rangle} f(x)\, dx.$$

Die *inverse Fouriertransform* $f^\vee$ ist definiert als

$$f^\vee(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{+i\langle \xi, x\rangle} f(x)\, dx.$$

Zeigen Sie in formalen Rechnungen (also unter Annahme, dass die Integrale alle konvergieren und kommutieren)

(i) dass die Inversionsformel gilt

$$f(y) = (\hat{f})^\vee(y), \quad f(y) = \widehat{f^\vee}(y)$$

Zeigen Sie auch

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x), \quad (f^\vee)^\vee(x) = f(-x).$$

Hinweis: Dabei dürfen Sie benutzen, dass

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \xi, z\rangle} g(z)\, d\xi\, dz = g(0).$$

(ii) Sei $f = \partial_{x_i} g$. Zeigen Sie (formale Rechnung) für alle $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ und alle $i = 1, \ldots, n$,

$$\hat{f}(\xi) = -i\xi_i\, \hat{g}(\xi).$$

Zeigen Sie auch die Umkehrung, Ist $g(x) := -ix_i f(x)$

$$\partial_{\xi_i} \hat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi).$$

(iii) Schliessen Sie aus der vorigen Rechnung, dass falls $f = \Delta g$,

$$\hat{f}(\xi) = -|\xi|^2\, \hat{g}(\xi).$$

(iv) Sei $f_\lambda(x) := f(\lambda x)$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie

$$\hat{f}_\lambda(\xi) = \lambda^{-n} \hat{f}(\xi/\lambda).$$

(v) Zeigen sie in einer Dimension, $n = 1$, dass für $f(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ gilt

$$\hat{f}(\xi) = f(\xi).$$

Hinweis: Zeigen Sie mit obigen Rechnungen, dass gelten muss

$$\partial_\xi \hat{f}(\xi) = -\xi \hat{f}(\xi) \tag{1}$$

Verwenden Sie dann

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\xi^2} = \sqrt{\pi}.$$

um zu zeigen, dass $\hat{f}(0) = f(0)$. Damit ist das Anfangswertproblem (1) eindeutig lösbar, mit eindeutiger Lösung $\hat{f} = f$.

Bemerkung: Tatsächlich gilt in allen Dimensionen für $f(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$

$$\hat{f}(\xi) = f(\xi).$$

(vi) Zeigen Sie nun, dass für festes $t \in (0, \infty)$, falls $\hat{f}(\xi) := e^{-t|\xi|^2}$, so gilt

$$f(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

(vii) Zeigen Sie, dass für $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt

$$\widehat{fg}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi - \eta)\, \hat{g}(\eta)\, d\eta.$$

Aufgabe 2

Sei Φ die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung,

$$\Phi(x,t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie,

(i) für $t > 0$

$$\partial_t \Phi(x,t) - \Delta\Phi(x,t) = 0.$$

(ii) für $|x| \neq 0$,

$$\lim_{t \to 0_+} \Phi(x,t) = 0.$$

(iii) für $|x| = 0$,

$$\lim_{t \to 0_+} \Phi(x,t) = +\infty.$$
