Universität Freiburg
Mathematisches Institut
PD. Dr. Armin Schikorra
M.Sc. Frank Rösler

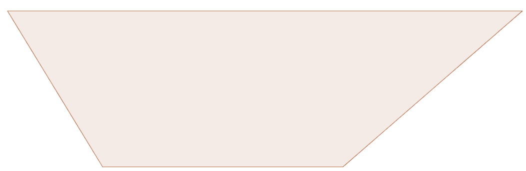
Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen
Serie 3 vom 08.11.2016

Aufgabe 8 Sei $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Mit ∂X bezeichnen wir den üblichen Randoperator in $\mathbb{R}^{n+1}$. Der parabolische Rand $\mathcal{P}X \equiv \partial_{\mathcal{P}} X$ ist definiert als

$$\partial_{\mathcal{P}}(X) = \{(x,t) \in \partial X : \quad Q(x,t;\rho) \cap X^c \neq \emptyset \ \forall \rho > 0\}$$

Dabei ist $Q(x,t;\rho)$ der (offene) parabolische Zylinder

$$Q(x,t;\rho) := \left\{(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ |y-x| < \rho, \quad t - \rho^2 < s < t\right\}.$$



(i) Sei die Menge X aus dem obigen Bild gegeben. Zeichnen Sie den parabolischen Rand $\partial_{\mathcal{P}} X$ ein.

(ii) Finden Sie eine offene Menge $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ so dass $\partial_{\mathcal{P}} X = \partial X$.

(iii) Sei $U \subset \mathbb{R}^n$, and $U_T := U \times (0,T]$. Dann hatten wir definiert $\Gamma_T := \overline{U_T} \backslash U_T$. Zeigen Sie, $\partial_{\mathcal{P}} U_T = \Gamma_T$.

Aufgabe 9 Wir haben das schwache Maximumsprinzip, Theorem 2.1, nur für Mengen $X = \Omega_T$ gezeigt. Zeigen Sie es für beliebige offene, beschränkte Mengen $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$:

Sei $u \in C^2_1(X) \cap C^0(\overline{X})$. Sei L ein elliptischer Differential-Operator mit $c \equiv 0$.

(i) Ist u eine Unterlösung von $\partial_t - L$ in X, d.h.

$$(\partial_t - L)u \leq 0 \quad \text{in } X,$$

so gilt

$$\sup_{\overline{X}} u = \sup_{\partial_{\mathcal{P}} X} u.$$

(ii) Ist u eine Oberlösung von $\partial_t - L$ in X, d.h.

$$(\partial_t - L)u \geq 0 \quad \text{in } X,$$

so gilt

$$\inf_{\overline{X}} u = \inf_{\partial_{\mathcal{P}} X} u.$$

Aufgabe 10 Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist positiv semidefinit, in Formeln $A \geq 0$, falls gilt

$$\langle Av, v\rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

Eine Matrix A ist symmetrisch, falls $A^T = A$.
Zeigen Sie

(i) $A \geq 0$ impliziert $P^T AP \geq 0$ für jede Matrix $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(ii) $A \geq 0$ impliziert, dass die Diagonaleinträge $A_{ii} \geq 0$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

(iii) Sind $A, B \geq 0$ und ist B symmetrisch, dann gilt

$$A : B := \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} B_{ij} \geq 0.$$

Aufgabe 11 Zeigen Sie Korollar II.2.3 und Korollar II.2.4 aus der Vorlesung:
Sei $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine beschränkte, offene Menge, L ein elliptischer Differentialoperator mit $c \leq 0$. Seien $u, v \in C^2_1(X) \cap C^0(\overline{X})$ gegeben. Zeigen Sie folgendes

(i) Gilt $u = v$ auf $\partial_{\mathcal{P}} X$ und

$$(\partial_t - L)u = (\partial_t - L)v \quad \text{in } X$$

so gilt $u \equiv v$ in X.

(ii) Gilt $u \leq v$ auf $\partial_{\mathcal{P}} X$ und

$$(\partial_t - L)u \leq (\partial_t - L)v \quad \text{in } X$$

so gilt $u \leq v$ in X.