Universität Freiburg
Mathematisches Institut
PD. Dr. Armin Schikorra
M.Sc. Frank Rösler

Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen
Serie 4 vom 15.11.2016

Aufgabe 12 Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ gegebene Konstanten. Zu $\lambda \in \mathbb{R}$ assoziieren wir das quadratische Polynom p_λ,

$$p_\lambda(x) := \lambda a x^2 + bx + c \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie,

(i) gilt $a < 0$ und $c < 0$ dann gibt es ein $\lambda > 0$ so dass

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} p_\lambda(x) < 0.$$

(ii) ist $a \geq 0$ oder $c \geq 0$, dann ist die obige Aussage falsch.

Sei $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen. Ein parabolischer Randpunkt $(x_0, t_0) \in \partial_{\mathcal{P}} X$ erfüllt die parabolische Sphärenbedingung, falls es einen $n+1$-dimensionalen, offenen Ball mit radius $r > 0$ gibt $B^{n+1}(x_1, t_1; r) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ zentriert in einem $(x_1, t_1) \in \mathbb{R}^{n+1}$, so dass gilt

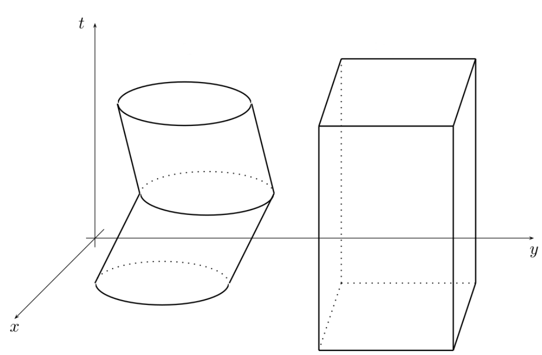
(i) $(x_0, t_0) \in \partial B^{n+1}(x_1, t_1; r)$,

(ii) $x_0 \neq x_1$,

(iii) $\emptyset \neq \left\{(x, t) \in B^{n+1}(x_1, t_1; r), \quad t < t_0\right\} \subset X$. Wir setzen dann

$$S(x_0, t_0; x_1, t_1; r) := \left\{(x, t) \in B^{n+1}(x_1, t_1; r), \quad t < t_0\right\}$$

und nennen dies eine zulässige Sphärenkappe.



Zwei Mengen X_1 und X_2 in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Quelle: "Lecture notes on Free Boundary Problems for Parabolic Equations", Daniele Andreucci, Sapienza Università di Roma.

Aufgabe 13 Seien die zwei Mengen X_1 und X_2 aus dem obigen Bild gegeben. In welchen Punkten ist die parabolische Sphärenbedingung erfüllt?

Aufgabe 14 Sei $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen, $(x_0, t_0) \in \partial_{\mathcal{P}} X$, der die die parabolische Sphärenbedingung erfüllt. Zeigen Sie:

(i) Zu einer zulässigen Sphärenkappe $S(x_0, t_0; x_1, t_1; r)$ können wir immer eine kleinere zulässige Sphärenkappe finden, d.h. ein $S(x_0, t_0; x_2, t_2; r_2)$, so dass gilt

$$S(x_0, t_0; x_2, t_2; r_2) \subset S(x_0, t_0; x_1, t_1; r)$$

und

$$\overline{S(x_0, t_0; x_2, t_2; r_2)} \cap \partial S(x_0, t_0; x_1, t_1; r) = \overline{B^{n+1}(x_1, t_1; r) \cap \{t = t_0\}}$$

(ii) Die Menge

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n : \quad (x, t_0) \in X \backslash \partial_{\mathcal{P}} X\}$$

erfüllt die übliche $\mathbb{R}^n$-innere Sphährenbedingung am Punkt x_0. Das heißt, es gibt eine n-dimensionalen Ball $B \subset \Omega$ mit $x_0 \in \partial B$.

Aufgabe 15 Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein Banachraum, $D(A) \subset X$ ein linearer Unterraum und $A : D(A) \to X$ ein linearer operator, so heißt X *beschränkt* genau dann, wenn für eine Konstante $C > 0$ gilt

$$\|Au\|_X \leq C\|u\|_X \quad \forall u \in D(A).$$

Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Menge, $X = (L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2})$, $D(A) := C^\infty(\overline{\Omega})$ und A gegeben durch

$$Au := \Delta u$$

Zeigen Sie, dass $A : D(A) \to X$ linear, aber nicht beschränkt ist.
