Universität Freiburg
Mathematisches Institut
PD. Dr. Armin Schikorra
M.Sc. Frank Rösler

Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen
Serie 5 vom 22.11.2016

Aufgabe 16 Zeigen Sie Lemma III.1.1 aus der Vorlesung: Seien $A, B \in L(X)$ beschränkte lineare Operatoren zwischen einem Banachraum X. Die Exponentialabbildung e^A ist gegeben durch

$$e^A := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} A^m, \tag{1}$$

wobei $A^0 := Id$. Zeigen Sie

(i) Die Reihendarstellung in (1) konvergiert absolut und es gilt $e^A \in L(X)$.

(ii) $e^0 = 0$.

(iii) Gilt $[A, B] := AB - BA \equiv 0$, dann gilt $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.

(iv) Es gilt e^A ist als Operator invertierbar und $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

Aufgabe 17 Sei $X = C^0([0, 1])$ mit der L^∞-norm versehen ein Banachraum. Gegeben sei ein $K \in C^0([0, 1]\times[0, 1])$. Definieren wir

$$(Au)(x) := \int_0^1 K(x, y)\, u(y)\, dy.$$

Finden Sie ein $D(A) \subset X$, so dass A ein dicht definierter beschränkter (linear bounded) Operator mit Norm $\|A\|_{D(A)\to X} = \|K\|_{L^\infty([0,1]\times[0,1]}$.

Aufgabe 18 Sei X ein Banachraum und $A : D(A) \subset X \to X$ ein (ggf. unbeschränkter) linearer Operator. Zeigen Sie,

(i) Sind A abgeschlossen und $B : X \to X$ ein linearer, stetiger Operator, dann kann $A + B$ als abgeschlossener Operator aufgefasst werden.

(ii) Ist A injektiv und A^{-1} ist ein linear *beschränkter* Operator, dann ist A abgeschlossen.

Aufgabe 19

(i) Sei X ein Banachraum und $A \in L(X)$ ein beschränkter linearer Operator von X nach X. Zeigen Sie,

$$T(t) := e^{tA}$$

ist eine C^0-Halbgruppe und es gilt

(ii) Zeigen Sie Proposition III.2.2 aus der Vorlesung: Sei $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ eine C^0-Halbgruppe. Zeigen Sie, dass dann $\Phi : [0,\infty)\times X \to X$ gegeben durch

$$\Phi(u,t) := T(t)u$$

eine stetige Abbildung von $[0,\infty)\times X$ nach X ist.

Hinweis: Stetigkeit bezüglich der Produktmetrik auf $[0,\infty)\times X$, d.h. für $(t,u),(s,v) \in [0,\infty)\times X$ gilt

$$d((t,u),(s,v)) := |t-s| + \|u-v\|_X.$$