Universität Freiburg
Mathematisches Institut
PD. Dr. Armin Schikorra
M.Sc. Frank Rösler

Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen
Serie 6 vom 29.11.2016

Aufgabe 20 In der Vorlesung wurde die "parabolische Distanz-Funktion"

$$\rho((t,x)-(s,y)) := \sqrt{|s-t|} + |x-y| \quad x,y \in \mathbb{R}^n,\ s,t \in \mathbb{R}$$

eingeführt. Zeigen Sie dass ρ eine Metrik auf $\mathbb{R}^{n+1}$ ist.

Aufgabe 21 Zeigen Sie Lemma IV.1.2 aus der Vorlesung: Es gilt

(i) einerseits
$$[uv]_{\alpha,Q} \le \|u\|_{L^\infty(Q)}\, [v]_{\alpha,Q} + [u]_{\alpha,Q}\, \|v\|_{L^\infty(Q)}$$

(ii) und für $k \in \{0,2\}$,
$$[u+v]_{k+\alpha,Q} \le [u]_{k+\alpha,Q} + [v]_{k+\alpha,Q}$$

Hinweis: Zeigen und benutzen Sie ggf. die folgende Ungleichung

$$|a_1 b_1 - a_2 b_2| \le |a_1|\,|b_1 - b_2| + |b_2|\,|a_1 - a_2|$$

Aufgabe 22 Zeigen Sie den ersten Teil von Theorem IV.1.3 aus der Vorlesung:
Sei $\mathcal{P}_2$ die Menge der Polynome p in $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}^n$ die von der folgenden Form sind

$$p(t,x) = at + b_i x^i + c_{ij} x^i x^j + d,$$

wobei $a, d \in \mathbb{R}$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ und $(c_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
Sei für $\alpha \in (0,1)$
$$[u]'_{2+\alpha,\mathbb{R}^{n+1}} \equiv [u]'_{2+\alpha} := \sup_{(t,x)\in\mathbb{R}^n} \sup_{\rho>0} \rho^{-2-\alpha} \inf_{p\in\mathcal{P}_2} \|u-p\|_{L^\infty(Q((t,x);\rho))},$$

wobei $Q((t,x);\rho)$ der parabolische Zylinder ist, d.h.

$$Q((t,x);\rho) = \left\{(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} :\ |x-y| < \rho,\ t-\rho^2 < s < t\right\}.$$

Zeigen Sie, es gibt eine Konstante $C > 0$ so dass für alle $u \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}^{n+1})$ gilt

$$[u]'_{2+\alpha,\mathbb{R}^{n+1}} \le C\, [u]_{2+\alpha,\mathbb{R}^{n+1}}.$$

Hinweis: Finden Sie für $u(x,t) - u(y,s)$ eine geeignete Darstellung über die Taylorentwicklung.

Aufgabe 23 Zeigen Sie Theorem IV.3.2 (Schauder für konstante Koeffizienten) aus der Vorlesung für $T < \infty$: Sei $\alpha \in (0,1)$, $T < \infty$, $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (-\infty, T])$ und

$$f := (\partial_t - \Delta)u.$$

Dann gilt für eine Konstante $C = C(\alpha, n)$,

$$[u]_{2+\alpha,\mathbb{R}^n\times(\infty,T)} \leq C\ [f]_{\alpha,\mathbb{R}^n\times(\infty,T)}.$$

Hinweise:

- Zeigen Sie, dass Sie Ohne Einschränkung können Sie annehmen: $T = 0$
- Die Cauchy-Abschätzungen, Theorem I.6.2, gelten rückwärts in der Zeit!