Universität Freiburg
Mathematisches Institut
PD. Dr. Armin Schikorra
M.Sc. Frank Rösler

Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen
Serie 7 vom 13.12.2016

Aufgabe 24 Wir wollen die folgende Gleichung betrachten

$$\begin{cases} |u'| = 1 & \text{auf } [0,1]. \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie: Es existiert keine Lösung $u \in C^1((0,1)) \cap C^0([0,1])$, welche die Gleichung fast überall (bzgl. des Lebesgue-Maßes) erfüllt.

(ii) Zeigen Sie: Es existieren unendlich viele Lösungen $u \in C^{0,1}((0,1)) \cap C^0([0,1])$, welche die Gleichung fast überall (bzgl. des Lebesgue-Maßes) erfüllen.

Eine Lösungs-Begriff "fast überall" ist also nicht zielfuehrend. Wir betrachten stattdessen die Gleichung mit einem zusätzlichen Viskositätsterm $\varepsilon u''$, den wir dann gegen Null schicken. Dann haben wir eine Eindeutigkeit für Lösungen.

Aufgabe 25 Für $\varepsilon > 0$ betrachten wir Lösungen zu

$$\begin{cases} -\varepsilon u'' + |u'| = 1 & \text{auf } [0,1]. \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

(i) Zeigen Sie ein schwaches Maximumsprinzip für die folgende Situation: Gilt für $u, v \in C^2((0,1)) \cap C^0([0,1])$

$$-\varepsilon(u-v)'' + |u'| - |v'| = 0 \quad \text{in } (0,1) \tag{2}$$

dann gilt

$$\max_{[0,1]}(u-v) = \max\{u(0)-v(0), u(1)-v(1)\}$$

und

$$\min_{[0,1]}(u-v) = \min\{u(0)-v(0), u(1)-v(1)\}$$

Hinweis: Gehen Sie vor wie im Beweis von Theorem II.2.1: Betrachten sie ein Maximums/Minimumspunkt x_0 von $u-v$ unter Annahme einer strikten Ungleichung in (2). Approximieren Sie dann u durch $u_\delta(x) := u(x) \pm \delta e^{\lambda x}$, welche dann eine strikte Ungleichung (2) erfüllen (für $\lambda \gg 1$).

(ii) Zeigen Sie ein Vergleichsprinzip: Gilt für $u, v \in C^2((0,1)) \cap C^0([0,1])$ mit $u(0) = u(1) = v(0) = v(1) = 0$

$$-\varepsilon(u-v)'' + |u'| - |v'| = 0 \quad \text{in } (0,1)$$

dann gilt $u = v$

(iii) Zeigen Sie: eine Lösung zu (1) ist symmetrisch, $u(x) = u(\frac{1}{2} - x)$. Somit gilt $u'(\frac{1}{2}) = 0$.

Aufgabe 26 Untersuchen Sie, wie für kleines $\varepsilon > 0$ heuristisch Lösungen u_ε zur folgenden Gleichung aussehen.

$$\begin{cases} -\varepsilon u'' + |u'| = 1 & \text{auf } [0,1]. \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

(i) Gegen welche Funktionen konvergieren (heuristisch) die Lösungen u_ε für $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon > 0$? Zeichnen Sie die Limes-Funktion $u := \lim_{\varepsilon \to 0_+} u_\varepsilon$.

(ii) Was wenn $\varepsilon < 0$ und $\varepsilon \to 0$, gegen welche Lösung konvergieren die u_ε dann?

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 25 (iii), wie sieht $u_\varepsilon''(\frac{1}{2})$ aus?

Aufgabe 27 Sei $u \in C^0(\mathbb{R}^n)$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Angenommen u ist zweimal differenzierbar in x_0 und es existiert ein $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^n)$ so dass

$$\varphi(x) \geq u(x) \quad \text{für alle } x \text{ in einer kleinen Umgebung von } x_0.$$

Zeigen Sie: Gilt weiterhin $u(x_0) = \varphi(x_0)$, dann gilt auch

$$\nabla\varphi(x_0) = \nabla u(x_0) \quad \text{und} \quad \nabla^2\varphi(x_0) \geq \nabla^2 u(x_0).$$

Aufgabe 28 Wir definieren den Begriff der Viskositätslösungen der folgenden Gleichung

$$\begin{cases} |u'| = 1 & \text{auf } [0,1]. \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Ein $u \in C^0([0,1])$ mit $u(0) = u(1) = 0$ ist eine Viskositäts*unter*lösung von (3), falls für alle $\varphi \in C^2([0,1])$, $\varphi \geq u$ auf $(0,1)$ hält: Gilt für ein $x_0 \in (0,1)$ dass $\varphi(x_0) = u(x_0)$, dann gilt

$$|\varphi'(x_0)| \leq 1.$$

Ein $u \in C^0([0,1])$ mit $u(0) = u(1) = 0$ ist eine Viskositäts*ober*lösung von (3), falls für alle $\varphi \in C^2([0,1])$, $\varphi \leq u$ auf $(0,1)$ hält: Gilt für ein $x_0 \in (0,1)$ dass $\varphi(x_0) = u(x_0)$, dann gilt

$$|\varphi'(x_0)| \geq 1.$$

Ein $u \in C^0([0,1])$ mit $u(0) = u(1) = 0$ ist eine Viskositätslösung von (3), falls u eine Viskositäts*unter*lösung und eine Viskositäts*ober*lösung ist. Zeichnen Sie die folgenden Funktionen und entscheiden Sie jeweils, ob diese eine Viskositäts*unter*lösung, Viskositäts*ober*lösung oder gar Viskositätslösung von (3) ist.

(i) $u(x) := \begin{cases} |x| & \text{für } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 - |x| & \text{für } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$

(ii) $u(x) := \begin{cases} -|x| & \text{für } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ |x| - 1 & \text{für } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$

(iii) $u(x) := \begin{cases} |x| & \text{für } x \in [0, \frac{1}{4}] \\ \frac{1}{2} - |x| & \text{für } x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ |x - \frac{1}{2}| & \text{für } x \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ \frac{1}{2} - |x - \frac{1}{2}| & \text{für } x \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$

(iv) $u(x) = 0$.

(v) $u(x) = 1$.