Universität Freiburg
Mathematisches Institut
PD. Dr. Armin Schikorra
M.Sc. Frank Rösler

Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen
Serie 9 vom 17.01.2017

Aufgabe 33 Sei $\phi(z) = |z|^{-q}$, $z \in \mathbb{R}^n$, für ein $q > 0$. Zeigen Sie, für $|z| > 0$

$$\mathcal{P}^+_{\lambda,\Lambda}(D^2\phi)(z) = q|z|^{-q-2}\left(\Lambda(n-1) - \lambda(q+1)\right)$$

Hinweis: Nehmen Sie zunächst an, dass $z = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$: Zeigen und verwenden Sie

$$\sup_{\lambda I \leq A \leq \Lambda I} \left(\sum_{i=1}^{n} A_{ii} - A_{11}(2+q) \right) = \Lambda(n-1) - \lambda(q+1).$$

Aufgabe 34 Sei $u : \Omega \times (0,T)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine Viskositätsunterlösung von

$$\partial_t u + F(t, x, D^2 u(t,x)) \leq 0.$$

Zeigen Sie, ist F elliptisch (siehe Def. VI.1.2), dann ist u^+ eine Viskositätsunterlösung von

$$\partial_t u^+(t,x) + \mathcal{P}^-(D^2 u^+)(t,x) \leq |F(t,x,0)|$$

Zeigen Sie als Zwischenschritte dazu

(i) u ist eine Unterlösung zu
$$\partial_t u + \mathcal{P}^-(D^2 u)(t,x) \leq -F(t,x,0).$$

(ii) Ist u oberhalb stetig, so ist u^+ oberhalb stetig.

(iii) Berührt eine Testfunktion φ u^+ an einem Punkt x_0 von oben, so gibt es zwei Möglichkeiten: φ ist eine Testfunktion die u in x_0 von oben berührt oder $\partial_t\varphi \geq 0$ und $D^2\varphi \geq 0$.
