Universität Freiburg
Mathematisches Institut
PD. Dr. Armin Schikorra
M.Sc. Frank Rösler

Übungen zur Vorlesung
Partielle Differentialgleichungen
Serie 2 vom 25.10.2016

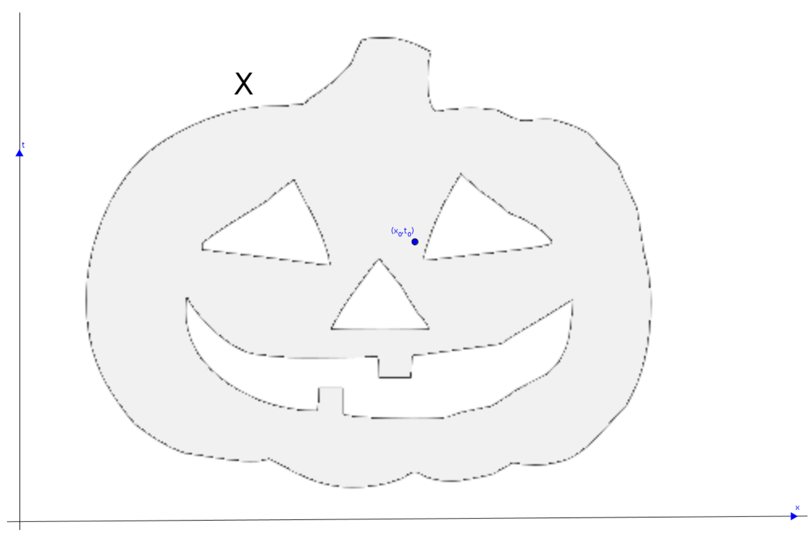
Aufgabe 3 Wir haben in Theorem I.4.2 das starke Maximumsprinzip auf parabolischen Zylindern kennengelernt. Benutzen Sie dies um ein starkes Maximumsprinzip auf allgemeinen Mengen X herzuleiten:

Sei $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine beliebige beschränkte, offene Menge. Angenommen es gilt $u \in C^\infty(\overline{X})$ und $\partial_t u - \Delta u$ in X. Angenommen es gilt für ein $(x_0, t_0) \in X$, dass

$$M := u(x_0, t_0) = \sup_{(x,t)\in X} u(x, t).$$

(i) Beschreiben Sie in Worten die Punkte die notwendigerweise zu der Menge C gehören, wobei

$$C := \{(x, t) \in X : \quad u(x, t) = M\}.$$



(ii) Sei die Menge X (grau) und der Punkt (x_0, t_0) wie im Bild gegeben. Zeichnen Sie (in orange) die Menge C ein.

Aufgabe 4 Zeigen Sie die folgende Abschätzung, die wir für das Harnack-Prinzip, Theorem I.5.1, verwenden.

(i) Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $0 < t_1 < t_2 < \infty$, dann gibt es eine Konstante $C = C(K, t_1, t_2) > 0$ so, dass

$$\frac{|x_1 - y|^2}{t_2} \leq \frac{|x_2 - y|^2}{t_1} + C \quad \forall x_1, x_2 \in K,\ y \in \mathbb{R}^n.$$

(ii) Zeigen Sie, dass dies für $t_1 = t_2$ nicht gilt.

Aufgabe 5 Zeigen Sie Theorem I.4.7: Seien $g \in C^0(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^0(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ für ein $T > 0$. Angenommen es gibt zwei Lösungen u^1 und $u^2 \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C^0(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)u(x,t) = f(x,t) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T), \\ u(x,0) = g(x) & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Gibt es weiterhin Konstanten a_1, a_2 und $A_1, A_2 > 0$ so dass

$$|u^1(x,t)| \le A_1\, e^{a_1 |x|^2}, \quad |u^2(x,t)| \le A_2\, e^{a_2 |x|^2} \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T],$$

so gilt

$$u^1 \equiv u^2 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times [0,T].$$

Hinweis: Benutzen Sie Theorem I.4.6 (Starkes Maximumsprinzip für das Cauchy-Problem) aus der Vorlesung.

Aufgabe 6 Gegeben Sei die folgende *Tychonoff*-Funktion:

$$u(x,t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(t)}{(2k)!}\, x^{2k},$$

wobei $g^{(k)}$ die k-te Ableitung ist, und

$$g(t) := \begin{cases} e^{(-t^{-\alpha})} & t > 0 \\ 0 & t \le 0. \end{cases}$$

(i) Zeigen Sie, $u \in C_1^2(\mathbb{R}^2_+) \cap C^0(\mathbb{R} \times [0,\infty))$.

(ii) Zeigen Sie nun, dass

$$\begin{cases} (\partial_t - \Delta)u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,T), \\ u(x,0) = 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

(iii) Finden Sie eine andere Lösung $v \not\equiv u$ von (1).

(iv) Warum (ohne Beweis) ist dies kein Widerspruch zu Theorem I.4.7 bzw. Aufgabe 5?

Aufgabe 7

(i) Sei $u_0 : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ eine glatte Funktion mit kompaktem Support, und es gelte $u_0(0) = 1$. Setze

$$u(x,t) := \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t)\, u_0(y) \quad \text{für } t > 0.$$

Zeigen Sie, dass $\inf_{x\in\mathbb{R}^n} u(x,t) = 0$ für alle $t > 0$, aber dass auch $\sup_{x\in\mathbb{R}^n} u(x,t) > 0$ für alle $t > 0$.

Warum ist dies kein Widerspruch zum Harnack-Prinzip, Theorem I.5.1?

(ii) Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$ gegeben, und u definiert als

$$u_\xi(x,t) := (t+1)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{|x+\xi|^2}{4(t+1)}}.$$

Zeigen Sie dass u eine Lösung von $(\partial_t - \Delta)u = 0$ auf $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ ist. Zeigen Sie aber auch, dass es für jedes feste $t > 0$ *keine* Konstante $C = C(t) > 0$ gibt für die gilt

$$\sup_{x\in[-1,1]} u_\xi(x,t) \le C \inf_{y\in[-1,1]} u_\xi(y,t) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Warum ist dies kein Widerspruch zum Harnack-Prinzip, Theorem I.5.1?

Hinweis für (2)*:* Wählen Sie $x = -\frac{\xi}{|\xi|}$ und $y = 0$. Was passiert, wenn $|\xi| \to \infty$?
